



ECRICOME

Banque d'épreuves écrites communes aux concours des Ecoles

ESC Bordeaux, ESC Marseille-Provence, ESC Reims, ESC Rouen, ICN Nancy

Durée : 4 heures
Option technologique

Aucun instrument de calcul n'est autorisé
Aucun document n'est autorisé

EXERCICE 1

1 - Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $x \rightarrow g(x) = x e^x - e^x + 1$.

Montrer que $g'(x)$ a le signe de x et en déduire le signe de $g(x)$.

2 - On considère la fonction f définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que f est définie sur \mathbb{R} . Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 et justifier la continuité de f sur \mathbb{R} .

b) Soit $x \neq 0$. Calculer la dérivée de f et montrer que $f'(x)$ est positif.

c) Calculer les limites de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.

d) Faire le tableau de variations de f .

3 - On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par récurrence par :

$$u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \quad (n \geq 0)$$

a) Vérifier que $f(2) - f(-2) = 2$

Montrer que, pour tout entier n strictement positif, $u_{n+1} - u_n$ a le signe de $u_n - u_{n-1}$.

En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.

b) Déterminer le signe de u_n .

c) Montrer alors que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers 0.

EXERCICE 2

L'élément F d'une machine est source de pannes fréquentes.

Lorsque cet élément est défaillant, il est aussitôt remplacé.

Le coût du dépannage (pièce et main d'oeuvre) s'élève à x francs et la perte de production due à cette panne à y francs.

On suppose qu'il ne peut se produire plus d'une panne par jour.

On note p_n la probabilité de bon fonctionnement le $n^{\text{ième}}$ jour ($n = 1$ correspond au jour de la mise en service de la machine).

Si la machine fonctionne correctement le jour j , la probabilité qu'elle fonctionne aussi correctement le jour $j+1$ est 0,6.

Si l'élément F est changé le jour j , la probabilité de bon fonctionnement le jour $j+1$ est 0,9.

1 - Exprimer la probabilité p_{n+1} de bon fonctionnement le $n+1^{\text{ème}}$ jour en fonction de la probabilité p_n de bon fonctionnement le $n^{\text{ème}}$ jour.

En déduire p_n en fonction de p_1 et n .

2 - Prouver que $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{9}{13}$.

3 - On admet que la convergence de cette suite est "rapide" et on considère désormais que la probabilité de bon fonctionnement de la machine est $\frac{9}{13}$ dans l'hypothèse où l'élément F n'est changé qu'en cas de panne.

On appelle C_1 la variable aléatoire égale au coût d'intervention quotidien.

a) Donner la loi de C_1 en fonction de x et y .

b) Calculer l'espérance de C_1 .

4 - On envisage un entretien préventif de cette machine consistant à remplacer chaque jour, avant la mise en service de la machine, l'élément F.

Le coût de cet entretien reste égal à x francs.

Dans cette hypothèse, on interviendra donc chaque jour, une ou deux fois, selon qu'il y a panne ou non.

La probabilité de bon fonctionnement de la machine pendant la journée reste évidemment égale à 0,9 puisque l'élément F est neuf !

On appelle C_2 la variable aléatoire égale au coût d'intervention quotidien.

a) Donner la loi de C_2 en fonction de x et y .

b) Calculer l'espérance de C_2 .

5 - Vous devez aider à choisir entre les deux options :

i) attendre la panne ou ii) procéder à un entretien préventif systématique.

Que conseillez-vous ?

Représentez graphiquement l'ensemble des couples (x, y) qui vous conduisent à conseiller l'option i).

PROBLEME

Les parties A, B et C sont totalement indépendantes entre elles et peuvent être traitées dans un ordre indifférent.

Partie A

Soit n un entier positif ou nul. On note I_n l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$.

- 1 - Calculer I_0 et I_1 .
- 2 - Trouver une relation entre I_{n+1} et I_n .
- 3 - En déduire que $I_n = n!$.

Partie B

Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 24 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ en utilisant la méthode du pivot de

Gauss.

Partie C

1 - Tracer dans un même repère orthonormé les parties des courbes C_1, C_2 et C_3 situées dans le quart de plan $m \geq 0, v \geq 0$, d'équations respectives :

$$\begin{aligned} C_1 & \quad v = -m^2 + 4m - 2 \\ C_2 & \quad v = -m^2 + 5m - 3 \\ C_3 & \quad v = -m^2 + 6m - 6 \end{aligned}$$

On prendra m pour abscisse et v pour ordonnée. L'unité sera prise égale à 3 cm.

On donne les valeurs approchées suivantes : $\sqrt{2} \approx 1,4$ $\sqrt{3} \approx 1,7$ $\sqrt{13} \approx 3,6$

2 - Hachurer sur le graphique précédent la région qui correspond aux solutions du système d'inéquations:

$$\begin{cases} m \geq 0 \\ v \geq 0 \\ v \geq -m^2 + 4m - 2 \\ v \leq -m^2 + 5m - 3 \\ v \geq -m^2 + 6m - 6 \end{cases}$$

3 - Exprimer l'aire de cette région à l'aide d'intégrales.

Donner sa valeur en cm^2 .

Partie D

m et v sont deux réels positifs.

Dans cette partie, on cherche une condition sur m et v pour qu'il existe un triplet de réels positifs a , b et c tels que :

i) $f(t) = (at^2 + bt + c)e^{-t}$ soit la densité d'une variable aléatoire X prenant des valeurs positives.

ii) $E(X) = m$

iii) $V(X) = v$.

1 - Montrer que $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est l'unique solution du système linéaire $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ m^2 + v \end{pmatrix}$

où A est la matrice de la partie B.

2 - Expliciter a , b et c en fonction de m et v .

3 - Montrer que les couples (m, v) qui répondent à la question sont ceux déterminés à la question C 2 -

4 - Quel est parmi ces couples, celui qui maximise m ? Déterminer alors v , a , b et c .