

EPREUVES ESC MATHÉMATIQUES
OPTION SCIENTIFIQUE

**"L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique
est interdit pendant cette épreuve".**

Exercice 1

$M_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3, à coefficients réels.

On considère dans $M_3(\mathbb{R})$ les deux matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que : $A^3 + A = O$.
2. (a) Déterminer les valeurs propres de A .
(b) A est-elle diagonalisable ?
3. L'espace vectoriel réel \mathbb{R}^3 est muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
On pose : $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_2 + e_3$, $v_3 = -e_1 + e_2 + e_3$.
(a) Montrer que $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
(b) Ecrire la matrice de passage P de \mathcal{B} à \mathcal{C} .
(c) On note u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à la matrice A . Déterminer la matrice de u relativement à \mathcal{C} .

Exercice 2

Première partie

1. Etablir que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, l'intégrale $\int_0^1 e^{-u} u^{x-1} du$ est convergente.
On définit alors sur \mathbb{R}_+^* la fonction F par : $F(x) = \int_0^1 e^{-u} u^{x-1} du$.
2. (a) Calculer $F(1)$ et $F(2)$.
(b) Exprimer $F(\frac{1}{2})$ en fonction de $\Phi(\sqrt{2})$, où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
3. En étudiant, pour x et x' éléments de \mathbb{R}_+^* , le signe de $F(x) - F(x')$, déterminer le sens de variation de F .

Deuxième partie

1. En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F(x+1) = xF(x) - \frac{1}{e}$.
2. Justifier que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{1}{e x} \leq F(x) \leq \frac{1}{x}$.
3. Dédurre de ce qui précède :
 - (a) les limites de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers 0,
 - (b) un équivalent de $F(x)$ en $+\infty$,
 - (c) un équivalent de $F(x)$ en 0 (on pourra utiliser l'inégalité : $\forall u \in \mathbb{R}_+, 1 - u \leq e^{-u}$).

Troisième partie

On considère la série de terme général $\frac{(-1)^k}{k!(k+x)}$ ($k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}_+^*$).

1. (a) Etablir la convergence de cette série.

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on note : $g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+x)}$.

- (b) Calculer $g(1)$.

2. (a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in \mathbb{R}_+, \left| e^{-u} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k u^k}{k!} \right| \leq \frac{u^{n+1}}{(n+1)!}$.

(b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \left| \int_0^1 e^{-u} u^{x-1} du - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{k+x} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!}$.

- (c) En conclure que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F(x) = g(x)$.

Exercice 3

Soient N un entier naturel non nul et α un réel de $]0; 1[$. On dispose de N boules numérotées de 1 à N , réparties dans deux urnes \mathcal{U} et \mathcal{V} .

On considère l'expérience \mathcal{E} suivante :

- on choisit au hasard un nombre entier entre 1 et N ,
- si le nombre choisi est k , $1 \leq k \leq N$, la boule numérotée k est changée d'urne avec la probabilité α , maintenue dans l'urne qui la contient avec la probabilité $1 - \alpha$.

On répète cette expérience \mathcal{E} . Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules contenues dans l'urne \mathcal{U} après n réalisations de \mathcal{E} .

Première partie

Dans cette partie, $N = 3$, $\alpha = \frac{1}{3}$ et on suppose qu'au départ, toutes les boules sont dans \mathcal{U} .

1. Donner les lois de X_0 et de X_1 .
2. (a) Pour $r \in \{1, 2, 3\}$ et $s \in \{2, 3\}$, calculer la probabilité conditionnelle $P(X_2 = r / X_1 = s)$.
(b) En déduire la loi de X_2 .
3. Donner la loi du couple (X_1, X_2) . Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Deuxième partie

Dans cette partie, $N = 2$, $\alpha = \frac{1}{2}$ et on suppose que X_0 suit une loi uniforme sur $\{0, 1, 2\}$.

1. Exprimer, pour $k \in \{0, 1, 2\}$, la probabilité $P(X_0 = k)$.
2. (a) Pour $i \in \{0, 1, 2\}$ et $j \in \{0, 1, 2\}$, déterminer $P(X_{n+1} = i / X_n = j)$.
(b) Vérifier que : $\forall j \in \{0, 1, 2\}, \sum_{i=0}^2 P(X_{n+1} = i / X_n = j) = 1$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer M , matrice carrée d'ordre 3, telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = MU_n$.

(b) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, M^n = \begin{pmatrix} a_n & \frac{1}{4} & b_n \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ b_n & \frac{1}{4} & a_n \end{pmatrix}$,

où a_n et b_n seront exprimés en fonction de n (on vérifiera que $a_1 = \frac{1}{2}$ et $b_1 = 0$).

(c) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les probabilités $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = 2)$.