MATHEMATIQUES
OPTION TECHNOLOGIQUE

EPREUVES ESC

LUNDI 11 MAI 1998, de 8 h à 12 h

"L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique

est interdit pendant cette épreuve".

Exercice 1

On considère dans $M_3(\mathbb{R})$ les quatre matrices suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ \text{et} & & \\ u_{n+1} & = & 2u_n + 1 \end{cases}$ pour tout entier naturel n .
   (a) Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

2. (a) Calculer le produit de matrices $(A - I)(A - 2I)$ et en déduire que $A^2 - 3A + 2I = O$.
   (b) Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et de I.
   (c) Donner la matrice A^{-1}.

3. (a) Déterminer les réels a et b tels que $A = aI + bB$.
   (b) Calculer B^2.

4. (a) Montrer, par récurrence sur n, qu'il existe deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout entier naturel n, $A^n = a_nI + b_nB$, où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient les relations :
   $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, et pour tout entier naturel n : $\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ \text{et} \\ b_{n+1} = 2b_n + a_n \end{cases}$.
   (b) Quelle est la nature de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   (c) En déduire que pour tout entier naturel n , $A^n = I + (2^n - 1)B$.
   (d) La relation est-elle encore vraie pour $n = -1$?

Exercice 2

Partie A

Soit g la fonction définie pour tout x réel par $g(x) = (x^3 + x^2)e^{-x}$. On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de g dans un repère du plan.

1. Soit P le polynôme de degré 2 défini pour tout x réel par $P(x) = x^2 - 2x - 2$.
   (a) Déterminer les racines de P.
   (b) En déduire le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x.

2. (a) Déterminer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
   (b) Etudier les branches infinies de $\mathcal{C}$.

3. (a) Montrer que $g'(x) = -x(x^2 - 2x - 2)e^{-x}$ pour tout x réel.
   (b) Donner le tableau de variations de g.

4. Donner les équations des tangentes à la courbe $\mathcal{C}$ aux points d'abscisses 0 et -1.

5. Construire $\mathcal{C}$ ainsi que ses tangentes remarquables dans un repère orthogonal d'unités : 1cm sur (Ox) et 2cm sur (Oy).
   On prendra $e \simeq 2,7$; $x_1 \simeq -0,7$; $x_2 \simeq 2,7$; $g(x_1) \simeq 0,30$; $g(x_2) \simeq 1,8$; $g(5) \simeq 1$
   où $x_1 = 1 - \sqrt{3}$ et $x_2 = 1 + \sqrt{3}$.

Partie B

1. On pose $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ et pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx$.
   (a) Montrer que I_0 est une intégrale convergente égale à 1.
   (b) En intégrant par parties, montrer que, pour tout réel M :
   $$\int_0^M x^{n+1}e^{-x}\,dx = -M^{n+1}e^{-M} + \int_0^M (n+1)x^n e^{-x}\,dx \ .$$
   (c) A l'aide d'une récurrence et des deux questions précédentes, montrer que pour tout entier naturel n, les intégrales I_n sont convergentes et vérifient la relation : $I_{n+1} = (n+1)I_n$.
   (d) En déduire que pour tout entier naturel n, $I_n = n!$.

2. Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \frac{1}{8}g(x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.
   (a) Montrer que f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire que l'on notera S.
   (b) Calculer l'espérance $E(S)$ et la variance $V(S)$ de S.

Exercice 3

Le gérant d'un magasin de matériel informatique a acheté un stock de boîtes de disquettes. 5% des boîtes sont abîmées. Le gérant estime que :

- 60% des boîtes abîmées contiennent au moins une disquette défectueuse,
- 98% des boîtes en bon état ne contiennent aucune disquette défectueuse,
- les états des diverses boîtes sont indépendants les uns des autres.

1. **Dans cette question, un client achète une des boîtes du lot.**

   On désigne par A l'événement : "la boîte achetée est abîmée" et par D l'événement : "la boîte achetée contient au moins une disquette défectueuse".

   (a) . Donner les probabilités $P(A)$, $P(\overline{A})$, $P(D/A)$, $P(D/\overline{A})$, $P(\overline{D}/A)$ et $P(\overline{D}/\overline{A})$.
   . Calculer la probabilité de l'événement D.

   (b) Le client constate qu'une des disquettes est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'il ait acheté une boîte abîmée ?

2. **Dans cette question, un client achète une boîte par mois.**

   Tant qu'il n'a pas trouvé de disquettes défectueuses, le client se fournit dans le même magasin. A la première disquette défectueuse trouvée, il change de fournisseur.
   On considère que le lot est suffisamment grand pour que la probabilité d'acheter une boîte contenant au moins une disquette défectueuse soit la même chaque mois et égale à $p = \dfrac{49}{1000}$.
   Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de boîtes du lot achetées par ce client au moment où il décide de changer de magasin.

   (a) k est un entier non nul.
   . Décrire l'événement $(Y = k)$.
   . En déduire l'expression de $P(Y = k)$ en fonction de k.

   (b) Reconnaître la loi de Y et donner $E(Y)$.

3. **Dans cette question, un client achète en une seule fois n boîtes du lot.**

   On considère que chaque boîte a la probabilité $p = \dfrac{49}{1000}$ de contenir au moins une disquette défectueuse.
   Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boîtes achetées contenant au moins une disquette défectueuse.

   (a) Reconnaître la loi de X.

   (b) Lorsque le client constate qu'une disquette est défectueuse, il ramène la boîte qui la contenait au magasin. Comment choisir n pour qu'en moyenne il ait au plus une boîte à retourner ?