



CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE PARIS
CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Vendredi 24 Avril 1998, de 8 h à 12 h

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

L'objet de ce problème est l'étude d'un algorithme d'approximation d'une racine carrée de certains éléments de \mathbb{R} , \mathbb{C} ou $M_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire la construction d'une suite convergeant vers un élément dont le carré est donné.

Partie I. Algorithme de Newton dans \mathbb{R} .

Soit a un réel strictement positif.

1) a) Donner le tableau de variation de la fonction définie, pour x élément de \mathbb{R}_+ , par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right)$$

- b) Justifier rapidement l'existence de la suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée de $x_0 = a$ et de la relation de récurrence : $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout entier naturel n .
c) Pour tout entier naturel n , établir les égalités :

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_n} (x_n - \sqrt{a})^2 \quad \text{et} \quad x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{1}{2x_{n+1}} (a - x_{n+1}^2)$$

- d) En déduire que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers \sqrt{a} .
2) a) Pour tout entier naturel n non nul, prouver les inégalités :

$$0 \leq x_{n+1} - \sqrt{a} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}} (x_n - \sqrt{a})^2$$

- b) Soit b un réel strictement positif et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs vérifiant l'inégalité : $u_{n+1} \leq bu_n^2$ pour tout entier naturel n non nul.
 Pour tout entier naturel n non nul, donner une majoration de u_n en fonction de n, b, u_1 .
- c) En déduire, pour tout entier n non nul, une majoration de $x_n - \sqrt{a}$ en fonction de n, x_1 et a .
- 3) a) En décrivant pas à pas les premières étapes de l'algorithme, que dire du résultat rendu par le programme suivant quand on l'exécute ?

```

program racine_carree ;
function rc(a,x,eps :real) :real ;
begin
if abs(x*x-a)<eps then rc :=x else begin x :=1/2*(x+a/x) ;
rc :=rc(a,x,eps) ;
end ;
end ;

begin
writeln(rc(2,2,1e-16)) ;
end.

```

- b) On rappelle les inégalités : $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$.

Montrer que, lors de l'exécution du programme précédent, le nombre de comparaisons effectuées est inférieur ou égal à six. On supposera le type *real* suffisamment étendu pour pouvoir manipuler des nombres à une précision d'au moins vingt décimales.

Partie II. Algorithme de Newton dans \mathbb{C}

On se propose dans cette partie d'adapter la méthode de Newton à la recherche d'une racine carrée d'un nombre complexe a , c'est-à-dire d'approcher un nombre complexe dont le carré vaut a . Dans toute cette partie a désigne un nombre complexe qui n'est pas un réel négatif ou nul.

On note $\mathcal{R}e(z)$ la partie réelle d'un nombre complexe z .

- 1) a) Montrer qu'il existe un unique nombre complexe b de partie réelle strictement positive tel que $b^2 = a$.

On note $\mathcal{P}_+ = \left\{ z \in \mathbb{C}, \mathcal{R}e\left(\frac{z}{b}\right) > 0 \right\}$.

- b) Dans cette sous-question (et uniquement ici) on suppose que $a = 2i$. Déterminer le nombre b dans ce cas particulier et représenter l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z est élément de \mathcal{P}_+ .

- 2) On revient au cas général (où le complexe a n'est pas un réel négatif ou nul) et on considère l'application f définie pour tout nombre complexe z non nul par : $f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{a}{z} \right)$.

Établir l'inclusion : $f(\mathcal{P}_+) \subset \mathcal{P}_+$.

- 3) On considère la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée de $z_0 = a$ et par la relation de récurrence : $z_{n+1} = f(z_n)$ pour tout entier naturel n .

On pose également : $w_n = \frac{z_n - b}{z_n + b}$ pour tout entier naturel n .

- a) Justifier l'existence des suites $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- b) Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, w_n en fonction de w_{n-1} , puis, pour tout entier naturel n , w_n en fonction de w_0 et n .
- 4) Prouver la majoration : $|w_0| < 1$. En déduire la limite de la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Partie III. Racine carrée d'une matrice.

Dans cette partie n désigne un entier naturel au moins égal à 2.

- On note $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées à coefficients réels ayant n lignes et n colonnes.
- On note $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices colonnes à coefficients réels ayant n lignes et une colonne.
- On munit \mathbb{R}^n de sa structure euclidienne usuelle dont on note $\|\cdot\|$ la norme.
- On identifie les vecteurs de \mathbb{R}^n aux éléments de $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de telle sorte que si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ on écrira

$$Mx \text{ pour } M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

- Soit A une matrice carrée à coefficients réels. On appelle racine carrée de A toute matrice B vérifiant $B^2 = A$.

A. Quelques exemples

- 1) Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'admet pas de racine carrée.
- 2) On se propose, dans cette question, de généraliser le résultat de la question précédente. On considère l'élément de $M_n(\mathbb{R})$ suivant :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A est donc la matrice dont le coefficient en ligne i et colonne j est nul sauf si $1 \leq i \leq n-1$ et $j = i+1$ auquel cas il vaut 1.

On suppose qu'il existe une matrice B racine carrée de A et on note g l'endomorphisme de \mathbb{R}^n ayant, dans la base canonique, B pour matrice.

- a) L'endomorphisme g est-il bijectif?
 - b) Prouver que $\text{Im } g$ est stable par g (c'est-à-dire que $g(\text{Im } g) \subset \text{Im } g$), puis que la restriction de g à $\text{Im } g$ est un automorphisme de $\text{Im } g$.
 - c) Que vaut g^{2n} ? En déduire que la matrice A n'a pas de racine carrée.
- 3) Donner un exemple d'élément de $M_2(\mathbb{R})$ possédant une infinité de racines carrées.

B. Racine carrée d'une matrice symétrique strictement positive

On note \mathcal{S}_n l'ensemble des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$. On appelle matrice symétrique strictement positive, tout élément de \mathcal{S}_n dont les valeurs propres sont strictement positives. On note \mathcal{S}_n^+ l'ensemble des matrices symétriques réelles strictement positives. On suppose désormais que A est un élément de \mathcal{S}_n^+ .

- 1) Montrer que A admet une racine carrée symétrique réelle strictement positive. *On pourra commencer par le cas où A est diagonale.*
- 2) Soit B et C deux racines carrées symétriques réelles strictement positives de A .
 - a) Justifier l'existence de deux matrices P et Q inversibles et de deux matrices diagonales D et Δ telles que : $A = P D^2 {}^t P = Q \Delta^2 {}^t Q$.
 - b) En déduire l'existence d'une matrice inversible R telle que $R D^2 = \Delta^2 R$.
Établir l'égalité : $R D = \Delta R$. *On comparera les coefficients de ligne i et de colonne j ($1 \leq i, j \leq n$) de ces deux matrices.*
 - c) Conclure qu'il existe une unique racine carrée de A symétrique réelle strictement positive, qu'on notera $A^{1/2}$.

Jusqu'à la fin de cette partie B, on note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A et, pour tout entier j , $1 \leq j \leq p$, E_j le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ_j .

- 3) Pour tout entier j tel que $1 \leq j \leq p$ et pour tout réel x , on pose :

$$L_j(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^p \frac{x - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i}$$

- a) Montrer que la famille (L_1, L_2, \dots, L_p) est une base de l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré strictement inférieur à p .
- b) Montrer qu'il existe un unique polynôme P à coefficients réels de degré strictement inférieur à p tel que, pour tout entier i de $\{1, 2, \dots, p\}$, $P(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$.
- c) i) Pour tout entier j , $1 \leq j \leq p$, et pour tout vecteur x_j de E_j , calculer $P(A)(x_j)$ et en déduire l'égalité : $P(A)^2 = A$.
ii) Montrer que les valeurs propres de $P(A)$ sont toutes strictement positives.
iii) Conclure à l'égalité :

$$A^{1/2} = \sum_{i=1}^p \sqrt{\lambda_i} L_i(A)$$

4) Un exemple

On considère les éléments de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ suivants :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} n & -1 & \dots & \dots & -1 \\ -1 & n & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \dots & \dots & -1 & n \end{pmatrix}$$

U est donc la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1 et A celle dont le coefficient en ligne i et colonne j vaut n si $i = j$ et -1 sinon.

- Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de U et A .
- Exprimer $A^{1/2}$ en fonction de A et I_n (matrice identité de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$).

Partie IV. Algorithme de Newton dans \mathcal{S}_n^+ .

Dans toute cette partie on considère un élément A de \mathcal{S}_n^+ et une base orthonormée (e_1, e_2, \dots, e_n) de \mathbb{R}^n formée de vecteurs propres de A , le vecteur propre e_i étant, pour tout entier i , $1 \leq i \leq n$, associé à la valeur propre λ_i (les réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ n'étant pas nécessairement distincts).

- Soit M un élément de \mathcal{S}_n^+ dont (e_1, e_2, \dots, e_n) est aussi une base de vecteurs propres. On note $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ les valeurs propres correspondantes (i.e. $Me_i = \mu_i e_i$, pour tout entier i , $1 \leq i \leq n$).

Montrer que (e_1, e_2, \dots, e_n) est encore une base de vecteurs propres de la matrice $M' = \frac{1}{2}(M + M^{-1}A)$.

Pour tout entier i , $1 \leq i \leq n$, quelle relation existe-t-il entre la valeur propre μ'_i de M' associée à e_i et μ_i ?

- Déduire de la question précédente qu'il est possible de définir une suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{S}_n^+ telle que : $A_0 = A$ et, pour tout entier naturel k , $A_{k+1} = \frac{1}{2}(A_k + A_k^{-1}A)$.
 - Pour tout entier i , $1 \leq i \leq n$, on note $\lambda_{i,k}$ la valeur propre de A_k associée à e_i . Étudier, pour tout entier i , $1 \leq i \leq n$, la convergence de la suite $(\lambda_{i,k})_{k \in \mathbb{N}}$.

- On dit qu'une suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ converge vers la matrice M de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ s'il existe une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ de \mathbb{R}^n telle que, pour tout entier i , $1 \leq i \leq n$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|M_k \varepsilon_i - M \varepsilon_i\| = 0$.

Montrer que la suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $A^{1/2}$.