ESSEC

CONCOURS D'ADMISSION DE 1998

**Option scientifique**

# Mathématiques I

*Mercredi 29 avril 1998 de 8h à 12h*

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*
*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

On considère dans ce problème une fonction f à valeurs réelles définie sur $[-2, -1]$ et l'on se propose de la prolonger en une fonction F à valeurs réelles de classe $C^1$, et vérifiant la relation $F'(x) = F(x - x^2)$ pour $x \geq -1$.

Dans la partie I, on étudie une suite utilisée dans la partie II.
On prolonge alors f en une fonction F vérifiant la relation précédente sur $[-1, 0]$, puis sur $[-1, 2]$, ce qui fait respectivement l'objet des parties II et III.

*Les parties II et III sont indépendantes.*

## Partie I

1°) <u>Etude d'une fonction auxiliaire.</u>
On considère dans cette question la fonction $\psi$ définie sur $\mathbf{R}$ par $\psi(x) = x - x^2$.
a) Etudier les variations et représenter graphiquement cette fonction $\psi$.
b) Etablir, à l'aide d'un théorème dont on citera précisément l'énoncé, que $\psi$ induit une bijection de $]-\infty, 0]$ sur $]-\infty, 0]$.
c) Etudier les variations et représenter graphiquement (sur la figure précédente) la bijection réciproque.

ESSEC
AVENUE BERNARD HIRSCH - B.P. 105
95021 CERGY-PONTOISE CEDEX FRANCE
TÉL.: 33 (0) 1 34 43 30 00
FAX : 33 (0) 1 34 43 30 01

ÉTABLISSEMENT D'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR PRIVÉ.
RECONNU PAR L'ÉTAT. MEMBRE DE LA FESIC.



GROUPE ESSEC.
ETABLISSEMENTS D'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR PRIVÉS.
ASSOCIATION LOI 1901.
ACCREDITÉ AACSB - THE INTERNATIONAL ASSOCIATION FOR MANAGEMENT EDUCATION.
AFFILIÉ À LA CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE VERSAILLES VAL D'OISE-YVELINES.

2°) Etude d'une suite définie par récurrence.
On considère la suite $(x_n)$ de premier terme $x_o = -2$ et définie pour $n \geq 1$ par:

$$x_n - x_n^2 = x_{n-1} \quad \text{et} \quad x_n < 0.$$

*(on donne ainsi un procédé permettant de définir $x_n$ en fonction de $x_{n-1}$.)*

a) Déterminer $x_1$ et $x_2$, puis montrer que, pour tout nombre entier naturel n, le nombre réel $x_n$ est bien défini, de façon unique, à partir de $x_{n-1}$.
b) Etudier le sens de variation et la convergence de la suite $(x_n)$, puis montrer que $(x_n)$ converge vers 0.
c) On pose pour tout nombre entier naturel n:

$$u_n = x_{n+1} - x_n, \quad v_n = \ln(1 + u_n), \quad w_n = (1 + u_o)(1 + u_1) \dots (1 + u_n).$$

- Prouver la convergence de la série $\sum u_n$, et déterminer sa somme.
- Prouver la convergence de la série $\sum v_n$, et donner un majorant de sa somme.
- Prouver la convergence de la suite $(w_n)$, et montrer que $2 \leq \lim(w_n) \leq 9$.

Dans la suite, on considère une fonction f à valeurs réelles positives, de classe $C^1$ sur le segment $[-2, -1]$ et vérifiant la relation $f'(-1) = f(-2)$.

## Partie II

On étudie dans cette partie le problème P0 suivant:
Etudier l'existence et l'unicité d'une fonction $F: [-2, 0] \to \mathbf{R}$ vérifiant les 3 hypothèses:
H1] F est de classe $C^1$ sur $[-2, 0]$.
H2] $F(x) = f(x)$ pour tout nombre x appartenant à $[-2, -1]$ (f est "prolongée" par F).
H3] $F'(x) = F(x - x^2)$ pour tout nombre x appartenant à $[-1, 0]$.

1°) Unicité d'une solution F.
On suppose qu'il existe une fonction F vérifiant les trois hypothèses précédentes.
a) Si t est un réel appartenant à $[x_n, x_{n+1}]$, établir que $t-t^2$ appartient à $[x_{n-1}, x_n]$.
b) Etablir que si x désigne un nombre réel appartenant à $[x_1, x_2]$:

$$F(x) = f(x_1) + \int_{x_1}^{x} f(t-t^2)dt.$$

c) Etablir pour $n \geq 2$ que si x désigne un nombre réel appartenant à $[x_n, x_{n+1}]$:

$$F(x) = F(x_n) + \int_{x_n}^{x} F(t-t^2)dt.$$

En déduire que la connaissance de F sur $[x_{n-1}, x_n]$ détermine F sur $[x_n, x_{n+1}]$.
d) Quelle est la réunion I des intervalles $[x_n, x_{n+1}]$ pour $n \geq 0$?
En déduire que, s'il existe une solution F au problème P0, celle-ci est unique.

2°) Existence d'une solution F.
On construit sur I une fonction F de la façon suivante:
la fonction F est égale à f sur $[-2, -1]$ puis, la supposant ensuite connue sur $[x_{n-1}, x_n]$ pour $n \geq 1$, on pose pour tout nombre réel x appartenant à $[x_n, x_{n+1}]$:

$$F(x) = F(x_n) + \int_{x_n}^{x} F(t-t^2)dt.$$

a) Montrer, pour tout nombre entier naturel n, que la fonction F est de classe $C^1$ sur $[x_n, x_{n+1}]$ et préciser $F'(x)$ en fonction de F et de x.
Préciser les dérivées à droite et à gauche de F en $x_1$, puis, de façon générale, en $x_n$.
En déduire que la fonction F est de classe $C^1$ sur I.
b) Etudier le sens de variation de F sur $[x_1, x_2]$, puis montrer que F est croissante sur $[-1, 0[$.
c) On note M le maximum de la fonction positive f sur $[-2, -1]$. Etablir, pour tout nombre réel x appartenant à $[-2, x_{n+1}]$, que $0 \leq F(x) \leq Mw_n/2$.
En déduire que la fonction F est majorée sur l'intervalle $[-2, 0[$.

d) Etablir que $F(x)$ admet une limite $L$ quand $x$ tend vers 0. On pose alors $F(0) = L$. Prouver, à l'aide d'un théorème dont on citera précisément l'énoncé, que $F$ est de classe $C^1$ sur $[-2, 0]$ (on précisera $F'(0)$), puis que $F$ est solution du problème P0.

3°) Etude du signe de L.
a) Déterminer le signe de $L = F(0)$.
b) A quelle condition nécessaire et suffisante portant sur f le nombre L est-il nul?

## Partie III

On étudie dans cette partie le problème P1 suivant:
Etudier l'existence et l'unicité d'une fonction $F: [-2, 1] \to \mathbf{R}$ vérifiant les 3 hypothèses:
H1] $F$ est de classe $C^1$ sur $[-2, 1]$.
H2] $F(x) = f(x)$ pour tout nombre $x$ appartenant à $[-2, -1]$ (f est "prolongée" par F).
H3] $F'(x) = F(x - x^2)$ pour tout nombre $x$ appartenant à $[-1, 1]$.

On introduit à cet effet les notations suivantes:
- E désigne l'ensemble des fonctions réelles $g$ de classe $C^1$ sur $[0, 1]$ et telles que, pour tout nombre réel $x$ appartenant à $[0, 1]$, on ait $g'(x) = g(x - x^2)$.
- $\phi$ désigne l'application associant à tout élément $g$ de E le nombre réel $g(0)$.

1°) Propriétés de l'application $\phi$.
a) Prouver que E est un espace vectoriel, et que l'application $\phi$ est linéaire sur E.
b) Soit $g$ un élément du noyau de $\phi$ et M le maximum de la fonction $|g|$ sur $[0, 1/4]$.
- Etablir, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, que, pour tout nombre réel $x$ appartenant à $[0, 1]$, on a $|g(x)| \leq Mx$.
- En déduire que $M = 0$, puis que $g$ est la fonction nulle sur $[0, 1]$. Conclure.

2°) Etude d'une suite de fonctions $(g_n)$.
On définit une suite de fonctions $(g_n)$ de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$ en posant $g_0(x) = 1$, puis pour tout nombre entier $n \geq 1$ et tout nombre réel $x$ appartenant à $[0, 1]$:

$$g_n(x) = 1+\int_0^x g_{n-1}(t-t^2)dt.$$

a) Calculer $g_1(x)$ et $g_2(x)$.
b) Etablir que $g_n$ est une fonction polynôme. Notant $d_n$ son degré, on exprimera $d_{n+1}$ en fonction de $d_n$, puis l'on en déduira $d_n$ en fonction de $n$.
c) Etant donné un nombre réel $x$ appartenant à $[0, 1]$, établir par récurrence sur $n$ la double inégalité suivante:

$$0 \leq g_{n+1}(x)-g_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

d) En déduire, pour tout nombre réel $x$ appartenant à $[0, 1]$, que la suite $(g_n(x))$ est croissante, majorée par $e^x$, donc convergente vers une limite que l'on conviendra de noter $g(x)$ (et $g$ réalise donc une application de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$).

3°) Etude de la fonction $g$ définie par $g(x) = \lim g_n(x)$.
a) Etablir, pour tout couple $(n, p)$ de nombres entiers naturels et tout nombre réel $x$ appartenant à $[0, 1]$:

$$0 \leq g_{n+p}(x)-g_n(x) \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{x^k}{k!}.$$

En déduire, pour tout nombre entier naturel $n$ et tout nombre réel $x$ tel que $0 \leq x \leq 1$:

$$0 \leq g(x)-g_n(x) \leq e-\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

b) Etablir l'inégalité suivante pour tout couple (x, h) de nombres réels tels que x et x+h appartiennent à [0, 1]:

$$|g(x+h)-g(x)| \leq 2(e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!})+|g_n(x+h)-g_n(x)|.$$

En déduire, par un choix convenable de n puis de h, que $|g(x+h) - g(x)|$ peut être rendu inférieur à tout nombre $\varepsilon > 0$ donné à l'avance.

En déduire enfin que g est continue en tout x appartenant à [0, 1], et donc sur [0, 1].

c) Prouver, pour $0 \leq x \leq 1$, que la limite de l'expression suivante est nulle:

$$\int_0^x g(t-t^2)dt - \int_0^x g_n(t-t^2)dt.$$

En revenant à la définition de la suite $(g_n)$, en déduire que:

$$g(x) = 1+\int_0^x g(t-t^2)dt.$$

d) Prouver enfin que g est un élément de E tel que $\phi(g) = 1$.

4°) Résolution du problème P1.

a) Déduire des questions précédentes que l'application $\phi$ est bijective, et donner la dimension de l'espace vectoriel E.

b) Déduire des résultats des parties II et III qu'il existe une et une seule fonction F solution du problème P1.

5°) Résolution du problème P2.

On étudie enfin le problème P2 suivant:

Etudier l'existence et l'unicité d'une fonction F: [-2, 2] $\rightarrow$ **R** vérifiant les 3 hypothèses:

H1] F est de classe $C^1$ sur [-2, 2].

H2] F(x) = f(x) pour tout nombre x appartenant à [-2, -1] (f est "prolongée" par F).

H3] $F'(x) = F(x - x^2)$ pour tout nombre x appartenant à [-1, 2].

a) Prouver que, si F est solution du problème P2, l'application $x \rightarrow F(x) + F(1-x)$ est constante sur [-1, 2].

b) En déduire que le problème P2 admet une solution F et une seule.

***