

**ESSEC****Mathématiques II****Option économique**

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*

*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

On considère dans ce problème un guichet auquel se présentent aléatoirement des clients. L'objectif est d'étudier la file d'attente se formant à ce guichet au cours du temps, ce qui est traité dans la partie II. Dans la partie I, on étudie une suite récurrente utilisée ultérieurement.

**Partie I**

On considère un nombre réel strictement positif  $a$  et la fonction  $f$  définie pour tout nombre réel  $x$  par :

$$f(x) = \exp[a(x-1)].$$

On définit alors une suite  $(u_k)$  par son premier terme  $u_0 = 0$  et la relation :

$$u_{k+1} = f(u_k).$$

**1°) Convergence de la suite  $(u_k)$ .**

a) Etablir par récurrence pour tout nombre entier naturel  $k$  les inégalités :

$$0 \leq u_k \leq 1 \quad \text{et} \quad u_k \leq u_{k+1}.$$

b) En déduire la convergence de la suite  $(u_k)$ , dont on notera  $L(a)$  la limite.

**2°) Limite de la suite  $(u_k)$  lorsque  $a < 1$ .**

a) A l'aide de l'inégalité des accroissements finis, établir que :

$$0 \leq 1 - u_{k+1} \leq a(1 - u_k).$$

b) En déduire l'inégalité  $0 \leq 1 - u_k \leq a^k$  pour tout nombre entier naturel  $k$ , puis la limite  $L(a)$  de la suite  $(u_k)$  pour  $0 < a < 1$ .

**3°) Limite de la suite  $(u_k)$  lorsque  $a \geq 1$ .**

a) On étudie ici les racines de l'équation  $f(x) = x$  lorsque  $a \geq 1$ .

- Prouver que  $0 \leq 1 - \ln(a)/a \leq 1$  pour  $a \geq 1$ .

- Exprimer l'unique racine de l'équation  $f'(x) = 1$  en fonction de  $a$ .

- En déduire la variation de la fonction  $x \rightarrow f(x) - x$  pour  $a = 1$ , puis pour  $a > 1$ .

Préciser dans ces deux cas le nombre des racines de l'équation  $f(x) = x$ .

On convient désormais de noter  $r(a)$  la plus petite racine de l'équation  $f(x) = x$ .

On vérifiera en particulier que  $0 < r(a) < 1$  pour  $a > 1$ , et que  $r(1) = 1$ .

b) On étudie ici la plus petite racine  $r(a)$  de l'équation  $f(x) = x$  lorsque  $a \geq 1$ .

- Etudier et représenter graphiquement sur  $[0, +\infty[$  la fonction  $x \rightarrow xe^{-x}$ .

Comparer les images des nombres  $a$  et  $ar(a)$  par cette fonction.

- En déduire que la fonction  $\phi$ , définie pour  $0 \leq x \leq 1$  par  $\phi(x) = xe^{-x}$ , réalise une bijection de  $[0, 1]$  sur  $[0, 1/e]$  et montrer que la fonction  $\phi^{-1}$  est continue et strictement croissante sur  $[0, 1/e]$  (on citera le théorème utilisé).

Dresser le tableau de variation de  $\phi^{-1}$ .

- Prouver que  $r(a) = \frac{1}{a} \phi^{-1}(ae^{-a})$ , puis déterminer la limite de  $r(a)$  en  $+\infty$ .

- c) On étudie maintenant la limite de la suite  $(u_k)$  lorsque  $a \geq 1$ .
- Etablir l'inégalité  $0 \leq u_k \leq r(a)$  pour tout nombre entier naturel  $k$ .
  - En déduire la limite  $L(a)$  de la suite  $(u_k)$  pour  $a \geq 1$ .
  - Ecrire (en PASCAL) un algorithme permettant de déterminer une valeur approchée de  $L(a)$  à  $10^{-2}$  près. On obtient ainsi  $L(2) = 0,20$ ,  $L(4) = 0,02$ , etc.

4°) Courbe représentative de la fonction  $a \rightarrow L(a)$  pour  $a > 0$ .

Déduire de ces résultats l'allure de la courbe représentative de la fonction  $a \rightarrow L(a)$  pour  $a > 0$ .

## Partie II

Dans cette partie, le temps est supposé discrétisé et se présente donc comme une succession d'instants  $0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots$  et l'on considère un guichet auquel peut se présenter au plus un client dans un intervalle de temps  $[n-1, n[$ , c'est à dire entre deux instants consécutifs quelconques  $n-1$  et  $n$  ( $n \geq 1$ ).

On suppose qu'un premier client est au guichet à l'instant 0, et, pour tout nombre entier  $n \geq 1$ , on désigne par  $B_n$  la variable aléatoire prenant la valeur 1 si un client se présente au guichet entre les instants  $n-1$  et  $n$ , et 0 sinon (et le client ainsi arrivé se place au bout de la file d'attente devant le guichet).

Ces variables aléatoires  $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$  sont supposées indépendantes et prennent la valeur 1 avec la probabilité  $p$  (où  $0 < p < 1$ ).

On appelle durée de service d'un client au guichet le temps passé par l'employé du guichet à le servir (une fois son attente dans la file achevée).

Pour préciser, si la durée de service du premier client est égale à  $n$ , le guichet est libre pour le service du client suivant à partir de l'instant  $n$ .

Les variables aléatoires indiquant les durées de service au guichet des clients successifs sont supposées indépendantes et suivent la même loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ . En particulier, on notera  $D$  la variable aléatoire indiquant la durée de service au guichet du client initial.

On convient d'appeler première vague de clients l'ensemble de ceux arrivés au guichet pendant la durée de service du client initial, puis, de façon générale, on appelle  $(k+1)^{\text{ième}}$  vague de clients l'ensemble de ceux arrivés pendant la durée de service des clients de la  $k^{\text{ième}}$  vague. On désigne alors par  $N_k$  le nombre aléatoire des clients de la  $k^{\text{ième}}$  vague (étant entendu que l'on pose  $N_k = 0$  s'il n'y a pas de client de  $k^{\text{ième}}$  vague). Par convention, on pose  $N_0 = 1$ .

1°) Loi de la variable aléatoire  $N_1$ .

a) Etant donné un nombre entier naturel  $n$ , déterminer la loi de la variable aléatoire  $N_1$  conditionnée par l'événement  $D = n$ .

On précisera les expressions des probabilités conditionnelles  $P(N_1 = k / D = n)$ .

b) En déduire à l'aide de la formule des probabilités totales que  $N_1$  suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre et l'espérance.

*fin du pb en page 467*