

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice I

On compare dans cet exercice les intérêts rapportés par une somme donnée placée de différentes façons possibles.

1°) Une question technique.

Dans toute cette question, on désigne par x un nombre réel positif donné.

a) On considère la fonction définie pour tout nombre réel $t > 0$ par:

$$f(t) = t \ln \left(1 + \frac{x}{t} \right)$$

Calculer $f'(t)$ et $f''(t)$. Quel est le signe de $f''(t)$?

Calculer la limite de $f'(t)$ quand t tend vers $+\infty$. Quel est le signe de $f'(t)$?

En déduire le sens de variation de la fonction f sur $]0, +\infty[$.

b) On considère la suite définie pour tout nombre entier $n \geq 1$ par:

$$u_n = \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n$$

- Déduire de l'étude de f le sens de variation des suites $(\ln(u_n))$ et (u_n) .
- Calculer la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

2°) Taux d'intérêt annuel et taux d'intérêt sur une fraction de l'année.

On considère une somme S_0 que l'on place de différentes façons.

a) On place S_0 durant une année au taux d'intérêt annuel $r > 0$.

De quelle somme dispose-t-on à l'issue d'une année de placement?

b) On subdivise l'année en n périodes de durées égales, et l'on place S_0 durant une année à un taux d'intérêt égal à r/n pour chacune des périodes.

De quelle somme dispose-t-on à l'issue d'une année de placement?

Déterminer la limite de celle-ci lorsque n tend vers $+\infty$.

Comparer ces deux placements des questions a) et b), et conclure.

c) On subdivise l'année en n périodes de durées égales, et l'on place S_0 durant une année à un taux d'intérêt égal à r_n pour chacune des périodes (où r_n est donc indépendant de la période considérée).

- de quelle somme dispose-t-on à l'issue d'une année de placement?
- Exprimer r_n en fonction de r et de n pour que le placement d'une somme rapporte les mêmes intérêts, que celle-ci soit placée à l'année au taux d'intérêt annuel r ou à l'année divisée en n périodes au taux d'intérêt par période r_n .

A titre d'exemple, si $r = 12\%$, le taux mensuel est égal à $0,95\%$.

3°) Taux d'intérêt annuel et taux d'intérêt instantané constant.

On considère une somme S_0 que l'on place au taux d'intérêt instantané $i > 0$, ce qui signifie que si l'on dispose à l'instant $t \geq 0$ de la somme $S(t)$ (avec donc $S(0) = S_0$), alors on dispose à l'instant $t+h \geq 0$ de la somme $S(t+h)$ où:

$$S(t+h) = S(t) \cdot [1 + ih + h\varepsilon(h)]$$

où $\varepsilon(h)$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0.

- a) Prouver que S est dérivable en t , et exprimer $S'(t)$ en fonction de $S(t)$ et i .
 b) Etudier la fonction $t \rightarrow \exp(-it)S(t)$, puis en déduire l'expression de $S(t)$ en fonction de S_0 , t et i .
 c) Quelle est la somme $S(1)$ obtenue à l'issue d'une année de placement? Exprimer i en fonction de r pour que le placement d'une somme rapporte les mêmes intérêts, que celle-ci soit placée à l'année au taux d'intérêt annuel r ou au taux d'intérêt instantané i .

A titre d'exemple, si $r = 12\%$, le taux instantané est égal à $11,33\%$.

4°) Placements avec taux d'intérêt instantané variable.

On considère une somme S_0 que l'on place au taux d'intérêt instantané $i(t) \geq 0$ ce qui signifie que si l'on dispose à l'instant $t \geq 0$ de la somme $S(t)$ (avec donc $S(0) = S_0$), alors on dispose à l'instant $t+h \geq 0$ de la somme $S(t+h)$ où:

$$S(t+h) = S(t) \cdot [1 + i(t)h + h\varepsilon(h)]$$

où $\varepsilon(h)$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0.

On suppose la fonction $t \rightarrow i(t)$ continue sur \mathbf{R}_+ et l'on note I sa primitive s'annulant en 0.

- a) Prouver que S est dérivable, et exprimer $S'(t)$ en fonction de $S(t)$ et de $i(t)$.
 b) Etudier la fonction $t \rightarrow \exp(-I(t))S(t)$, puis en déduire l'expression de $S(t)$ en fonction de S_0 et $I(t)$.
 c) En déduire la somme $S(n)$ obtenue à l'issue de n années de placement dans les quatre cas suivants (i et a sont des nombres réels positifs donnés):
1. $i(t) = i$ (taux constant).
 2. $i(t) = i(1 + a \sin t)$ (fluctuation autour d'un taux constant i).
 3. $i(t) = i(1 + a \exp(-t))$ (taux tendant asymptotiquement vers i sans osciller).
 4. $i(t) = i(1 + a \sin t \cdot \exp(-t))$ (taux tendant asymptotiquement vers i en oscillant).
- (On donnera à chaque fois l'allure de la courbe représentative de la fonction i sur \mathbf{R}_+ , ainsi que l'expression de la primitive I).

Exercice II

Dans cet exercice, on désigne par P_n l'espace vectoriel des fonctions-polynômes de degré inférieur ou égal à n . Celui-ci est rapporté dans toute la suite à sa base canonique (e_0, e_1, \dots, e_n) , définie par $e_0(x) = 1, e_1(x) = x, \dots, e_n(x) = x^n$.

1°) Etude d'un endomorphisme de l'espace vectoriel P_n .

On désigne par a un nombre entier fixé, et l'on définit, pour toute fonction-polynôme P appartenant à P_n , la fonction $T_a P$:

$$T_a P(x) = P(x+a).$$

- a) Prouver que $T_a P$ est élément de P_n , et prouver la linéarité de l'application T_a associant à toute fonction P appartenant à P_n la fonction $T_a P$ appartenant à P_n .
 b) Déterminer la matrice M_a de l'endomorphisme T_a dans la base canonique de P_n , et prouver l'inversibilité de M_a et de T_a .
 c) Déterminer, pour $a \neq 0$, la (ou les) valeur(s) propre(s) λ de T_a et les fonctions-polynômes P associées (qui vérifient donc $T_a P(x) = \lambda P(x)$ pour tout nombre réel x).

2°) Composition des endomorphismes $T_a, a \in \mathbf{Z}$.

- a) Etant donnés des nombres entiers a, b , déterminer les endomorphismes composés $T_a \circ T_b$ et $T_b \circ T_a$, et en déduire que $(T_a)^{-1} = T_{-a}$.
 b) Expliciter ainsi le carré et l'inverse de la matrice M_1 .
 Ecrire en particulier la matrice M_1 et son inverse dans le cas $n = 4$.

3°) Application à un problème de dénombrement.

Etant donnés deux nombres entiers naturels p, n , on désigne par $s(p, n)$ le nombre des surjections d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments.

(On remarquera que $s(p, 0) = 0$ et $s(0, n) = 0$ et l'on posera $s(0, 0) = 1$).

- Déterminer en fonction de p l'expression de $s(p, 1)$ et $s(p, 2)$.
- Déterminer en fonction de p l'expression de $s(p, p)$ et de $s(p, n)$ lorsque $n > p$.
- Combien y-a-t-il d'applications d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments?
- Exprimer à l'aide de n, p, k et $s(p, k)$ le nombre des applications d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments dont le cardinal de l'image est égal à k (et donc $0 \leq k \leq n$).
- Prouver enfin la formule suivante:

$$n^p = \sum_{k=0}^n C_n^k s(p, k).$$

En déduire l'expression de la matrice-ligne $[s(p, 0), s(p, 1), \dots, s(p, n)] \cdot M_1$, puis donner l'expression de $s(p, n)$ en fonction de p et n .

Applications:

- Etant donnés deux ensembles E_p et E_n de cardinaux p et n , déterminer à l'aide de n et p les nombres respectifs des applications injectives, surjectives, bijectives de E_p dans E_n .
- Déterminer la valeur de l'expression suivante pour tout nombre entier naturel n :

$$\sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^{n-k} k^n.$$

4°) Valeur des nombres $s(p, n)$ pour $p \leq n+2$.

On pose pour tout nombre entier naturel n et tout nombre réel x :

$$f_n(x) = (e^x - 1)^n.$$

- Exprimer $f_n(x)$ sous forme de somme en utilisant la formule du binôme de Newton.
- Déterminer $f_n^{(p)}(0)$ et montrer que $f_n^{(p)}(0) = s(p, n)$ pour tout nombre entier $p \geq 0$.

c) Ecrire le développement limité à l'ordre 3 de $x \rightarrow e^x - 1$ en 0, et en déduire l'expression en fonction de n des trois nombres réels a_n, b_n, c_n tels que:

$$f_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n+1} + c_n x^{n+2} + x^{n+2} \cdot \varepsilon(x)$$

où $\varepsilon(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

d) A l'aide de la formule de Taylor-Young écrite à l'ordre $n+2$ en 0, donner alors la valeur des nombres $s(p, n)$ pour $0 \leq p \leq n+2$.
