ESSEC

CONCOURS D'ADMISSION DE 1998

Option technologique

Mathématiques

Lundi 27 avril 1998 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice I: probabilités.

On dispose d'une urne contenant n boules, où n est un nombre entier tel que $n \geq 2$. Ces boules sont numérotées 1, 2, ... , n, et on les extrait au hasard, une par une, et sans remise dans l'urne.
Pour $1 \leq k \leq n$, on désigne par X_k la variable aléatoire valant 1 si la $k^{\text{ième}}$ boule tirée porte le numéro k, et 0 sinon. Enfin, on note X la variable aléatoire somme $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$.
On indiquera ce que représente concrétement l'événement $X = k$ $(0 \leq k \leq n)$.

1°) Etude du cas particulier $n = 3$.
a) Ecrire tous les résultats possibles de l'expérience précédente pour $n = 3$, c'est à dire tous les triplets (i, j, k) indiquant un ordre possible dans lequel on a retiré les boules (i représente le numéro que porte la première boule tirée, j celui de la deuxième boule tirée et k celui de la troisième boule tirée).
b) Indiquer la valeur prise par la variable aléatoire X pour chacun des résultats possibles, et en déduire la moyenne (ou l'espérance) de X lorsque $n = 3$.

2°) Loi des variables aléatoires X_k dans le cas général.
a) Déterminer la loi de la variable aléatoire X_1 et son espérance.
b) De manière générale, déterminer $P(X_k = 1)$ et $P(X_k = 0)$ et en déduire la loi de la variable aléatoire X_k et son espérance.

3°) Conclusion.
Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X, et interpréter ce résultat.

***

Exercice II: analyse, étude de suite et de fonction.

On se propose d'étudier la fonction f définie pour tout nombre réel x par:

$$f(x) = \exp(2(x-1)).$$

On définit alors une suite (u_k) par son premier terme $u_0 = 0$ et la relation:

$$u_{k+1} = f(u_k).$$

1°) Etude de la fonction f.
a) Calculer f(1).
b) Calculer f'(x) et déterminer le sens de variation de f.
c) Résoudre l'équation f'(x) = 1 et dresser le tableau de variations de la fonction $x \to f(x) - x$ *(on rappelle que ln2 = 0,69...).*
d) En déduire que cette fonction $x \to f(x) - x$ s'annule deux fois et deux fois seulement sur **R**, dont une fois dans l'intervalle [0, 1/2] en un nombre noté L, et qui vérifie donc f(L) = L *(on rappelle que e^{-2} = 0, 14... et que e^{-1} = 0,37...).*

2°) Limite de la suite (u_k).
a) En raisonnant par récurrence sur k, établir les inégalités:

$$0 \leq u_k \leq L \quad \text{et} \quad u_k \leq u_{k+1}.$$

En déduire que la suite (u_k) est convergente et préciser sa limite.
b) Prouver que la fonction f' est croissante sur [0, 1/2], et en déduire son maximum sur [0, 1/2].
c) En déduire, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, que:

$$0 \leq L-u_{k+1} \leq \frac{2}{e}(L-u_k).$$

d) En déduire l'inégalité $0 \leq L - u_k \leq (2/e)^k$ pour tout nombre entier naturel k.

A titre d'exemple, on obtient pour n = 15 l'inégalité $0 \leq L - 0,20 \leq 0,01$.

3°) Représentation graphique de f.
Tracer avec précision (unité 10cm) les courbes représentatives de f et de y = x sur l'intervalle [-0,5, 1,5] *(on donne de plus f(-0,5) = 0,05... et f(1,5) = 2,71...).*
Construire géométriquement sur cette figure, à l'aide d'une règle, les points d'abscisse u_1, u_2, u_3 et u_4.

Exercice III: analyse et étude de taux d'intérêt.

On étudie dans cet exercice les intérêts que rapporte une somme donnée placée de différentes façons possibles.

1°) Etude préliminaire de la suite $(1 + x/n)^n$.

Dans toute cette question, on désigne par x un nombre réel positif donné.

a) On considère la fonction définie pour tout nombre réel $t > 0$ par:

$$f(t) = t.\ln\left(1+\frac{x}{t}\right).$$

Calculer $f'(t)$ et $f''(t)$ et montrer que $f''(t) \leq 0$ pour $t > 0$.

Calculer la limite de $f'(t)$ quand t tend vers $+\infty$ et montrer que $f'(t) \geq 0$ pour $t > 0$.

En déduire le sens de variation de la fonction f sur $]0, +\infty[$.

b) On considère la suite définie pour tout nombre entier $n \geq 1$ par:

$$u_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

- Calculer et comparer u_1, u_2, u_3.
- Déduire de l'étude de f le sens de variation des suites $(\ln(u_n))$ et (u_n).
- Calculer la limite de (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

2°) Taux d'intérêt annuel et taux d'intérêt sur une fraction de l'année.

On considère une somme S_o que l'on place de différentes façons.

a) On place S_o durant une année au taux d'intérêt annuel $r > 0$.

De quelle somme dispose-t-on à l'issue d'une année de placement?

b) On subdivise l'année en n périodes de durées égales, et l'on place S_o durant une année à un taux d'intérêt égal à r/n pour chacune des périodes.

De quelle somme dispose-t-on à l'issue d'une année de placement?

Déterminer la limite de celle-ci lorsque n tend vers $+\infty$.

Comparer ces deux placements des questions a) et b), et conclure.

c) On subdivise l'année en n périodes de durées égales, et l'on place S_o durant une année à un taux d'intérêt égal à r_n pour chacune des périodes (où r_n est donc indépendant de la période considérée).

- De quelle somme dispose-t-on à l'issue d'une année de placement?
- Exprimer r_n en fonction de r et de n pour que le placement d'une somme rapporte les mêmes intérêts, que celle-ci soit placée à l'année au taux d'intérêt annuel r ou à l'année divisée en n périodes au taux d'intérêt par période r_n.

A titre d'exemple, si r = 12%, le taux mensuel est égal à 0,95%.

3°) Taux d'intérêt annuel et taux d'intérêt instantané constant.

On considère une somme S_o que l'on place au taux d'intérêt instantané $i > 0$, ce qui signifie que si l'on dispose à l'instant $t \geq 0$ de la somme $S(t)$ (avec donc $S(0) = S_o$), alors on dispose à l'instant $t+h \geq 0$ de la somme $S(t+h)$ où:

$$S(t+h) = S(t).[1 + ih + h\varepsilon(h)]$$

où $\varepsilon(h)$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0.

a) Prouver que S est dérivable en t, et exprimer $S'(t)$ en fonction de $S(t)$ et i.

b) Etudier la fonction $t \rightarrow \exp(-it)S(t)$, puis en déduire l'expression de $S(t)$ en fonction de S_o, t et i.

c) Quelle est la somme $S(1)$ obtenue à l'issue d'une année de placement?

Exprimer i en fonction de r pour que le placement d'une somme rapporte les mêmes intérêts, que celle-ci soit placée à l'année au taux d'intérêt annuel r ou au taux d'intérêt instantané i.

A titre d'exemple, si r = 12%, le taux instantané est égal à 11,33%.