CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Mercredi 6 Mai 1998, de 8 h à 12 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Ce problème a pour objet l'étude du nombre de fois où, dans une recherche séquentielle du maximum de n entiers distincts deux à deux, celui-ci est amené à changer de valeur au cours de l'exécution de l'algorithme; ce dernier est explicitement défini dans la partie II.

Notations.

Pour tout entier naturel n non nul on notera par I_n l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites numériques, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ signifiera que u_n est équivalent à v_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie I. Quelques résultats préliminaires.

Les parties A et B sont indépendantes l'une de l'autre, leurs résultats seront utilisés dans la suite du problème.

A

Dans cette partie n désigne un entier naturel.

1) a) Vérifier rapidement que l'application φ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même définie par :
$$\forall P(X) \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P(X)) = P(X+1)$$
est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Déterminer la matrice M de φ dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Déterminer M^{-1}.

2) On suppose que $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ et $(b_0, b_1, \dots, b_n)$ appartiennent à $\mathbb{R}^{n+1}$ et vérifient :
$$\forall p \in \{0, \dots, n\},\ b_p = \sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_p^k a_k$$

a) Trouver un lien entre les deux matrices lignes $(a_0 \ \ a_1 \ \ \dots \ \ a_n)$, $(b_0 \ \ b_1 \ \ \dots \ \ b_n)$ et M.

b) En déduire, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, l'expression de a_k en fonction des nombres $b_0, \dots, b_k$.

B

Dans cette sous-partie $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ désigne une suite numérique réelle et g une fonction positive, continue sur $[1,+\infty[$, décroissante sur un intervalle $[c,+\infty[$ inclus dans $[1,+\infty[$, telles que $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)\,dt$ soit divergente et $w_{n+1}-w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} g(n)$.

1) On suppose que q et N sont deux entiers naturels tels que $c \leqslant q < N$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant q$, on a : $g(n+1) \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant g(n)$.

b) En déduire : $\displaystyle\int_q^N g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=q}^{N-1} g(n) \leqslant \int_q^N g(t)\,\mathrm{d}t + g(q)$.

2) On considère un réel ε tel que $0<\varepsilon<1$.

a) Montrer qu'il existe un entier naturel $q \geqslant c$ tel que $(1-\varepsilon)g(n) \leqslant w_{n+1}-w_n \leqslant (1+\varepsilon)g(n)$ dès que $n \geqslant q$.

b) En déduire que, pour tout entier $N>q$:

$$(1-\varepsilon)\int_1^N g(t)\,\mathrm{d}t - (1-\varepsilon)\int_1^q g(t)\,\mathrm{d}t + w_q \leqslant w_N \leqslant (1+\varepsilon)\int_1^N g(t)\,\mathrm{d}t + (1+\varepsilon)g(q) + w_q$$

3) Montrer que : $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \displaystyle\int_1^n g(t)\,\mathrm{d}t$.

4) En utilisant ce qui vient d'être prouvé, montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

Partie II. Etude d'un algorithme.

Dans cette partie n désignera un entier naturel non nul.
On suppose que dans le préambule d'un programme écrit en Turbo-Pascal on a défini :

1) une constante entière $\mathtt{C} \geqslant 2$.
2) un type `tableau=array[1..C] of integer ;`

L'introduction de la constante `C` n'étant faite que pour pouvoir définir le type `tableau`, on pourra la considérer aussi grande que l'on veut.
On considère alors la procédure suivante.

```
procedure Recherche(n :integer ; t :tableau ; var max :integer) ;
    var i :integer ;
        begin
            max :=t[1] ;
            for i :=2 to n do
                    begin
                    if t[i]>max then max :=t[i] ;
                    end ;
        end ;
```

1) Quel sera le contenu de la variable `max` après l'appel dans le programme principal de `Recherche(10,t,max)` ?

2) On considère n entiers distincts deux à deux et on suppose que ces nombres sont affectés aux n premières "cases" de `t`, variable de type `tableau`, (un entier par case).

a) Quel est le nombre de rangements possibles de ces n entiers dans les n "cases mémoires" `t[1], ..., t[n]` ?

Pour tout i appartenant à I_n, on note par $V(i,n)$ le nombre de rangements des n entiers dans les n "cases mémoires" `t[1], ..., t[n]` tels que l'appel de la procédure `Recherche (n,t,max)` provoque i affectations de la variable `max` au cours de son exécution.
On admettra que ce nombre $V(i,n)$ est indépendant des n entiers initiaux pourvu toutefois que ceux-ci soient distincts.

b) Vérifier qu'effectivement le nombre d'affectations possibles de la variable **max** au cours de l'exécution de `Recherche(n,t,max)` appartient à I_n.

Par convention, on pose $V(0,n) = 0$ *et* $V(k,n) = 0$ *lorsque* $k > n$.

c) Quel est le nombre d'affectations de la variable **max** au cours de l'exécution de `Recherche(n,t,max)` si, pour tout $i \in I_n$, `t[i]`$= n+1-i$?

d) Montrer que $V(1,n) = (n-1)!$ et déterminer $V(n,n)$.

e) On suppose dans la première sous-question qui suit que $2 \leqslant i \leqslant n$.

- Montrer que $V(i,n+1) = V(i-1,n) + nV(i,n)$.

On pourra distinguer les rangements de $n+1$ entiers distincts deux à deux dans `t[1]`, ..., `t[n+1]`, suivant que `t[n+1]` contient ou non le plus grand de ces $n+1$ entiers.

- Montrer que la formule précédente s'étend aux cas $i = 1$ et $i = n+1$.
- Montrer qu'elle est encore vraie si $n = 1$ et $1 \leqslant i \leqslant 2$.

f) On définit le polynôme $P_n(X)$ par $P_n(X) = \sum_{i=0}^{n} V(i,n)X^i$.

- Montrer que $P_{n+1}(X) = (n+X)P_n(X)$.
- En déduire l'expression de $P_n(X)$.

3) On pose $G_n(X) = \dfrac{1}{n!}P_n(X)$.

a) Calculer $G_n(1)$.

b) Exprimer $G_{n+1}(X)$ à l'aide de $G_n(X)$.

c) Comparer $G_n'(1)$ et $1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$.

4) Étant donné n entiers distincts deux à deux, on les range aléatoirement dans les n "cases" `t[1]`, ..., `t[n]` d'une variable `t` de type `tableau`.

Tous les rangements possibles constituent les événements élémentaires d'un espace probabilisé muni de la probabilité p : ces rangements étant de probabilités égales.

On note X_n la variable aléatoire égale au nombre d'affectations de la variable **max** au cours de l'exécution de `Recherche(n,t,max)`.

a) Déterminer la probabilité de l'événement $(X_n = 1)$ et de façon générale, exprimer, lorsque i appartient à I_n, $p(X_n = i)$ à l'aide de $V(i,n)$ et n.

b) Déterminer l'espérance de X_n.

c) Montrer que, si n est supérieur ou égal à 2, alors : $p(X_n = 2) = \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n-1}\right)$.

Donner un équivalent simple de $p(X_n = 2)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

5) a) Si i appartient à I_n, montrer que : $(n+1)p(X_{n+1} = i) - np(X_n = i) = p(X_n = i-1)$.

b) En utilisant les résultats de la partie I.B. montrer par récurrence sur i que :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*,\ p(X_n = i) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(i-1)!\,n}\Big(\ln n\Big)^{i-1}$$

Partie III. Calcul de l'inverse d'une certaine matrice.

On désigne toujours par n un entier naturel non nul, et $V(i,n)$ a toujours la signification qu'on lui a attribuée dans la partie II. On convient que : $V(0,0) = 1$ et $V(i,0) = 0$ pour tout $i \in I_n$.

Soit $A = \Big(a_{ij}\Big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n+1\\ 1\leqslant j\leqslant n+1}}$ la matrice appartenant à $\mathbb{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $a_{ij} = (-1)^{j-i}V(i-1,j-1)$ pour tout $(i,j) \in \big(I_{n+1}\big)^2$.

Cette partie utilise certains résultats des parties I et II.

1) Montrer que $X(X-1)(\ldots)(X-n+1) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}V(k,n)X^k$.

2) On définit la famille de polynômes $\Big(N_i(X)\Big)_{i\in\{0,1,\ldots,n\}}$ par $N_0(X) = 1$, $N_1(X) = X$ et de façon générale $N_j(X) = X(X-1)(\ldots)(X-j+1)$ pour tout $j \in I_n$.

a) Montrer que $\Big(N_i(X)\Big)_{i\in\{0,1,\ldots,n\}}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Quelle est la matrice de passage de la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ à $\Big(N_i(X)\Big)_{i\in\{0,1,\ldots,n\}}$?

3) a) Montrer que A est inversible.
Pour tout $(i,j) \in (I_{n+1})^2$, l'élément situé sur la $i^{ième}$ ligne et la $j^{ième}$ colonne de A^{-1} est noté $\omega(i-1, j-1)$.

b) Montrer que : $X^n = \sum_{k=0}^{n} \omega(k,n) N_k(X)$.

4) a) Pour tout $p \in \{0, 1, \dots, n\}$, comparer p^n et $\sum_{k=0}^{p} k!\omega(k,n)\mathbf{C}_p^k$.

b) En utilisant les résultats de la partie I.A. donner une expression de $\omega(k,n)$.

Partie IV. Interprétation des nombres $\omega(k,n)$.

Dans cette partie encore n désignera un entier naturel non nul.
Soit k un entier naturel non nul, on appelle $k-$partition de I_n tout ensemble $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ dont les éléments A_i, pour $i = 1, \dots, k$, sont des parties non vides de I_n, deux à deux disjointes et dont la réunion est égale à I_n.
On note par $s(k,n)$ le nombre de $k-$partitions de I_n et on convient que $s(0,n) = 0$.

1) Déterminer $s(1,1)$, $s(n,n)$, $s(1,n)$ et $s(k,n)$ lorsque k est un entier strictement supérieur à n.

2) Soit p un entier naturel non nul.

a) Déterminer le nombre de n-listes dont les éléments appartiennent à I_p. On rappelle que dans une telle liste les éléments ne sont pas forcément distincts.

b) Soit k un élément de I_p, déterminer le nombre de n-listes dont les éléments appartiennent à $\{1, \dots, k\}$, chacun des nombres $1, \dots, k$ apparaissant au moins une fois dans la liste.

c) Montrer que $p^n = \sum_{k=0}^{p} k!s(k,n)\mathbf{C}_p^k$.

3) Comparer $s(k,n)$ et $\omega(k,n)$ lorsque $k \in \{0, \dots, n\}$.