



Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

# École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1999

## MATHEMATIQUES

### 1ère épreuve (option scientifique)

Judi 6 mai 1999 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

### PREMIER PROBLÈME

#### Notations :

- $n$  désigne un entier supérieur ou égal à 3 .
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients réels .
- On identifie les matrices unicolonnes  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  d'ordre  $n$  avec les vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  .
- $\mathbb{R}^n$  est muni du produit scalaire canonique noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  défini par :

$$\text{si } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \text{ alors } \langle X, Y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k .$$

En identifiant les matrices de  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$  avec les réels, on a :  $\langle X, Y \rangle = {}^t X Y$  .

- $I_n$  désigne la matrice identité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  .
- $A_n$  est la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont le terme général  $a_{i,j}$  est égal à 1 si  $|i - j| = 1$  et égal à 0 sinon.

$$\text{Ainsi, par exemple, } A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

1. Montrer que  $A_3$  est diagonalisable.

Déterminer une matrice inversible  $P$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et une matrice diagonale  $D$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telles que  $A_3 = P D P^{-1}$  .

2. Soit  $\theta \in ]0; \pi[$ . On désigne par  $S_\theta$  l'ensemble des suites réelles  $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telles que  $s_0 = 0$  et pour tout entier naturel  $k$ ,  $s_{k+2} - 2 \cos \theta s_{k+1} + s_k = 0$ .

Montrer que, si la suite  $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$  appartient à  $S_\theta$ , alors pour tout entier naturel  $k$ :  $s_k = s_1 \frac{\sin k\theta}{\sin \theta}$ .  
En déduire que  $S_\theta$  est un espace vectoriel réel de dimension 1.

3. Soit  $\lambda$  une valeur propre réelle de  $A_n$  et  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  un vecteur propre (non nul) associé à  $\lambda$ .

On note  $m$  le plus grand des réels  $|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|$ .

- a. Montrer :  $\begin{cases} \bullet \lambda x_1 = x_2 \\ \bullet \forall k \in \{2, \dots, n-1\}, \lambda x_k = x_{k-1} + x_{k+1} \\ \bullet \lambda x_n = x_{n-1} \end{cases}$

Montrer pour tout entier  $k$  de  $\{1, \dots, n\}$  :  $|\lambda| |x_k| \leq 2m$ , et en déduire :  $|\lambda| \leq 2$ .

- b. On suppose  $|\lambda| < 2$ .

Montrer qu'il existe un unique  $\theta \in ]0; \pi[$  tel que  $\lambda = 2 \cos \theta$ .

Montrer que la suite  $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de  $S_\theta$  déterminée par  $s_1 = x_1$  vérifie :

$$\begin{cases} \bullet \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, s_k = x_k \\ \bullet s_{n+1} = 0 \end{cases}$$

En déduire qu'il existe un entier  $p$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$  tel que  $\theta = \frac{p\pi}{n+1}$ .

Pour tout entier  $p$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$ , on note  $\theta_p = \frac{p\pi}{n+1}$ ,  $\lambda_p = 2 \cos \theta_p$  et  $X_p = \begin{pmatrix} \sin \theta_p \\ \sin 2\theta_p \\ \vdots \\ \sin n\theta_p \end{pmatrix}$ .

- c. Soit  $p \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Montrer que  $\lambda_p$  est valeur propre de  $A_n$  et que  $X_p$  est un vecteur propre associé à  $\lambda_p$ .
- d. Montrer que  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  est l'ensemble de toutes les valeurs propres de  $A_n$  et que  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  est une base de  $\mathbb{R}^n$ .
4. Soit  $U_n$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de terme général  $u_{p,q} = \sin \frac{pq\pi}{n+1}$ ,  $(p, q) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$ .

Montrer que  $U_n$  est inversible et déterminer la matrice  $D_n$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $D_n = U_n^{-1} A_n U_n$ .

- 5.a. Montrer pour tout couple  $(p, q)$  de  $\{1, 2, \dots, n\}^2$  :  $\lambda_p {}^t X_p X_q = \lambda_q {}^t X_p X_q$ .

En déduire que la base  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  est orthogonale et que, pour tout couple  $(p, q)$  de  $\{1, 2, \dots, n\}^2$  tel que  $p \neq q$ , on a :  $\sum_{k=1}^n \sin k\theta_p \sin k\theta_q = 0$ .

- b. Montrer, pour tout  $p$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$  :  $\sum_{k=0}^n \cos 2k\theta_p = 0$ .

En déduire que, pour tout entier  $p$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$ , on a :  $\sum_{k=1}^n \sin^2 k\theta_p = \frac{n+1}{2}$ .

- c. En déduire :  $U_n^2 = \frac{n+1}{2} I_n$ , puis  $A_n = \frac{2}{n+1} U_n D_n U_n$ .

## DEUXIÈME PROBLÈME

On considère l'application  $f : [0; 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie, pour tout réel  $t$  de  $[0; 1[$ , par :

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{\ln(1-t)}{t} & \text{si } t \in ]0; 1[ \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

- 1.a. Montrer que  $f$  est continue sur  $[0; 1[$ .
  - b. Montrer que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $]0; 1[$  et calculer  $f'(t)$  pour tout réel  $t$  de  $]0; 1[$ .
  - c. Etablir que  $f'(t)$  tend vers  $\frac{1}{2}$  lorsque  $t$  tend vers 0, et que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $[0; 1[$ .
  - d. Montrer, pour tout réel  $t$  de  $[0; 1[$  :  $\ln(1-t) + \frac{t}{1-t} \geq 0$ .
  - e. Dresser le tableau de variation de  $f$ . On précisera la limite de  $f(t)$  lorsque  $t$  tend vers 1.
  - f. Tracer l'allure de la courbe représentative de  $f$ . (On n'étudiera pas la dérivée seconde de  $f$ , et on admettra que  $f$  est convexe.)
- 2.a. Montrer que, pour tout réel  $x$  de  $[0; 1]$ , l'intégrale  $\int_0^x f(t) dt$  existe. (On distinguera les cas  $x \in [0; 1[$  et  $x = 1$ .)

On note  $g : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie, pour tout réel  $x$  de  $[0; 1]$ , par :

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

- b. Montrer que  $g$  est continue sur  $[0; 1]$ , de classe  $C^2$  sur  $[0; 1[$  et calculer  $g'(x)$  pour tout réel  $x$  de  $[0; 1[$ .
  - c. Etablir que  $\frac{g(x) - g(1)}{x - 1}$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $x$  tend vers 1.
  - d. Dresser le tableau de variation de  $g$ . On admettra qu'une valeur approchée de  $g(1)$  à  $10^{-2}$  près est : 1,65.
  - e. Etablir que  $g$  est convexe sur  $[0; 1[$ .
  - f. Tracer l'allure de la courbe représentative de  $g$ . On précisera les demi-tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.
- 3.a. Justifier que, pour tout réel  $t$  de  $[0; 1[$ , la série numérique  $\sum_{n \geq 0} t^n$  converge.  
Quelle est sa somme ?

On note, pour tout entier naturel  $n$ ,  $R_n : [0; 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par :

$$\forall t \in [0; 1[, R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} t^k.$$

b. Montrer, pour tout entier naturel  $n$  et tout réel  $t$  de  $[0; 1[$  :  $R_n(t) = \frac{t^{n+1}}{1-t}$   
et en déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $R_n$  est continue sur  $[0; 1[$ .

c. Etablir, pour tout entier naturel  $n$  et tout réel  $x$  de  $[0; 1[$  :

$$\int_0^x \frac{1}{1-t} dt = \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x R_n(t) dt.$$

d. Montrer, pour tout entier naturel  $n$  et tout réel  $x$  de  $[0; 1[$  :

$$0 \leq \int_0^x R_n(t) dt \leq \frac{x}{(n+2)(1-x)}.$$

e. Démontrer que, pour tout réel  $x$  de  $[0; 1[$ , la série numérique  $\sum_{k \geq 0} \frac{x^{k+1}}{k+1}$  est convergente et que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k+1}.$$

4.a. Montrer que, pour tout réel  $x$  de  $[0; 1]$ , la série numérique  $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$  est convergente.

On note, pour tout entier naturel  $n$ ,  $\rho_n : [0; 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par :

$$\forall t \in [0; 1[, \rho_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{t^k}{k+1}.$$

b. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $\rho_n$  est continue sur  $[0; 1[$ .

c. Etablir, pour tout entier naturel  $n$  et tout réel  $x$  de  $[0; 1[$  :

$$g(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} + \int_0^x \rho_n(t) dt.$$

d. Démontrer, pour tout entier naturel  $n$  et tout réel  $t$  de  $[0; 1[$  :

$$0 \leq \rho_n(t) \leq \frac{1}{(n+2)(1-t)}.$$

e. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$  et tout réel  $x$  de  $[0; 1[$  :

$$0 \leq \int_0^x \rho_n(t) dt \leq \frac{-\ln(1-x)}{n+2}.$$

f. Conclure que, pour tout réel  $x$  de  $[0; 1[$  :  $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ .