Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1999

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option économique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

Pour tout entier naturel n, on note : $w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \; dt$.

1. Calculer w_0 et w_1.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. Montrer pour tout entier naturel n : $\quad w_n \geq 0$.
   En déduire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$w_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \;\sin^2 t \; dt$$

   En déduire : $\quad w_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} w_n$.
5. Montrer pour tout entier naturel n, en utilisant **2.** et **4.** :

$$0 < \frac{n+1}{n+2}\, w_n \leq w_{n+1} \leq w_n$$

   En déduire : $\quad w_{n+1} \sim w_n$ quand $n \to +\infty$.
6. Montrer, en utilisant **4.**, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = (n+1)w_n w_{n+1}$ est constante.
   En déduire : $\quad w_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 2

On considère les éléments suivants de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Justifier (sans calcul) que J est diagonalisable, que J n'est pas inversible, et que 0 est valeur propre de J.

   (b) Calculer J^2 et exprimer J^2 en fonction de I et K.

(a) Calculer les valeurs propres de J et déterminer une base de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres pour J.
En déduire que $P^{-1}\ J\ P$ est une matrice diagonale que l'on explicitera.

(b) Montrer, en utilisant **1.b.** et **2.a.** que $P^{-1}\ K\ P$ est une matrice diagonale que l'on explicitera.

2. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On considère l'élément suivant de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$:

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que M s'exprime simplement à l'aide de I, J, K et a, b, c.

(b) En déduire que $P^{-1}\ M\ P$ est une matrice diagonale que l'on explicitera.

3. Trouver une matrice X de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$X^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

La lettre c désigne un entier naturel non nul fixé.
Une urne contient initialement des boules blanches et des boules rouges, toutes indiscernables au toucher.
On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne selon le protocole suivant : après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne et on rajoute dans l'urne, avant le tirage suivant, c boules de la couleur qui vient d'être tirée.

1. Dans cette question, on suppose que l'urne contient initialement b boules blanches et r boules rouges, où b, r sont des entiers naturels non nuls.

(a) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche au premier tirage ?

(b) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche au deuxième tirage ?

(c) Si la deuxième boule tirée est blanche, quelle est la probabilité que la première boule tirée ait été blanche ?

2. Pour tous entiers naturels non nuls n, x, y, on note $u_n(x,y)$ la probabilité d'obtenir une boule blanche au n^{eme} tirage, lorsque l'urne contient initialement x boules blanches et y boules rouges.

(a) Montrer, en utilisant un système complet d'évènements associé au premier tirage, que, pour tous entiers naturels non nuls n, x, y, on a :

$$u_{n+1}(x,y) = u_n(x+c,y)\frac{x}{x+y} + u_n(x,y+c)\frac{y}{x+y}$$

(b) En déduire, par récurrence, que, pour tous entiers naturels non nuls n, x, y, on a :

$$u_n(x,y) = \frac{x}{x+y}$$

3. Dans cette question, on suppose que l'urne contient initialement une boule blanche et une boule rouge et que $c = 1$. Pour tout entier naturel non nul n, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages.

(a) Donner la loi de X_1.

(b) Donner la loi de X_2.

(c) Montrer par récurrence, que X_n suit une loi uniforme dont on donnera l'espérance et la variance.

- FIN -