

ASSEMBLEE DES CHAMBRES FRANCAISES DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE

EPREUVES ESC

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES
OPTION TECHNOLOGIQUE

LUNDI 10 MAI 1999 , de 8 h à 12 h

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document ;*

**"L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique
est interdit pendant cette épreuve".**

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'épreuve est composée de trois exercices indépendants dont les différentes parties sont elles-mêmes largement indépendantes.

Exercice 1

Partie A

On considère dans $M_3(\mathbb{R})$ les 3 matrices suivantes :

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} (tous les détails des calculs figureront sur la copie).

2. (a) Vérifier que : $P^{-1}MP = D$ et en déduire M en fonction de P , D et P^{-1} .

(b) Déterminer D^n pour tout entier naturel n non nul.

(c) En expliquant le raisonnement suivi, exprimer M^n en fonction de P , D^n et P^{-1} pour tout entier naturel n non nul.

(d) Etablir que, pour tout entier naturel n non nul : $M^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n & 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n & 2 \end{pmatrix}$.

Partie B

Un tourniquet comprend 3 cases A , B et C . Au cours des instants successifs $0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots$ une boule se déplace sur le tourniquet de la manière suivante :

- A l'instant 0 , la boule est en A .
- Si à l'instant n la boule est en A , à l'instant $n + 1$ elle est en B ou en C avec équiprobabilité.
- Si à l'instant n la boule est en B , à l'instant $n + 1$ elle est en A ou en C avec équiprobabilité.
- Si à l'instant n la boule est en C , elle y reste à l'instant $n + 1$.

Pour n entier naturel, on désigne par :

- A_n l'événement "la boule est dans la case A à l'instant n "
- B_n l'événement "la boule est dans la case B à l'instant n "
- C_n l'événement "la boule est dans la case C à l'instant n ",

et l'on note : $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$, $c_n = P(C_n)$ et $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1. (a) Donner les probabilités : $P(A_0)$, $P(B_0)$, $P(C_0)$.

(b) Calculer $P(A_1)$, $P(B_1)$, $P(C_1)$ et vérifier que $P(A_1) + P(B_1) + P(C_1) = 1$.

2. Dans cette question n est un entier naturel non nul.

(a) Donner les 9 probabilités suivantes : $P(A_{n+1}|A_n)$, $P(B_{n+1}|B_n)$ et $P(C_{n+1}|C_n)$;
 $P(B_{n+1}|A_n)$ et $P(C_{n+1}|A_n)$; $P(A_{n+1}|B_n)$ et $P(C_{n+1}|B_n)$; $P(A_{n+1}|C_n)$ et $P(B_{n+1}|C_n)$.

(b) A l'aide de la formule des probabilités totales, exprimer les probabilités a_{n+1} , b_{n+1} et c_{n+1} en fonction des probabilités a_n , b_n et c_n .

(c) En déduire que : $X_{n+1} = M \cdot X_n$, M désignant la matrice de la partie A.

3. (a) Montrer par récurrence que : pour tout entier naturel n , $X_n = M^n \cdot X_0$.
 (b) En déduire pour n entier naturel les expressions de a_n , b_n et c_n en fonction de n et vérifier que : $a_n + b_n + c_n = 1$.
4. Soit T la variable aléatoire égale au nombre de déplacements nécessaires pour que la boule atteigne C pour la première fois.
 k désigne un entier naturel non nul.
 (a) Vérifier que : $(T = k) = (A_{k-1} \cap C_k) \cup (B_{k-1} \cap C_k)$.
 (b) Exprimer $P(T = k)$ en fonction de k . Reconnaître la loi de T . Donner $E(T)$.

Exercice 2

Partie A

Soit f la fonction numérique définie sur $[1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{x - \ln x}$.

On désigne par \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère du plan.

1. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
 (b) En déduire la nature de la branche infinie de \mathcal{C} en $+\infty$.
2. (a) Résoudre dans $[1; +\infty[$ l'inéquation : $1 - \ln x \geq 0$.
 (b) En déduire que $f'(x)$ s'annule et change de signe en $x = e$.
 (c) Donner le tableau de variations de f .
3. Donner les équations des tangentes à la courbe \mathcal{C} aux points d'abscisses 1 et e .
4. Construire \mathcal{C} ainsi que ses tangentes remarquables et asymptotes éventuelles dans un repère orthonormé d'unité 3 cm. On prendra : $e \simeq 2,7$; $\frac{e}{e-1} \simeq 1,6$.

Partie B

Soit a un réel strictement plus grand que 1.

Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ de loi définie par :

pour k entier naturel non nul, $P(T = k) = p \cdot \left(\frac{\ln a}{a}\right)^{k-1}$, où p est une constante réelle strictement positive.

n désigne un entier naturel non nul.

1. (a) Rappeler le signe de $\frac{\ln a}{a}$ et comparer le réel $\frac{\ln a}{a}$ au nombre 1. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln a}{a}\right)^n$.
 (b) Pour tout x réel différent de 1, développer $(1 + x + \dots + x^{n-1})(1 - x)$
 et en déduire que : $\sum_{k=1}^n x^{k-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$.
2. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\ln a}{a}\right)^{k-1}$.
 (a) Exprimer S_n en fonction de n et de $\frac{\ln a}{a}$.

(b) En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = f(a)$, où f est la fonction définie dans la partie A.

3. (a) Montrer alors que la loi de T est bien définie pour : $p = 1 - \frac{\ln a}{a}$.

(b) Reconnaître la loi de T et donner $E(T)$.

Exercice 3

Partie A

On désigne par X la variable aléatoire “durée de vie” (en heures) d’un appareil ménager. On suppose que X admet pour densité de probabilité la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0,002e^{-0,002x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Reconnaître la loi de X . Donner $E(X)$ et $V(X)$. Déterminer la fonction de répartition de X .
2. (a) Calculer la probabilité pour qu’un appareil fonctionne au moins 800 heures.
(b) Calculer la probabilité pour qu’un appareil fonctionne moins de 900 heures sachant qu’il a fonctionné au moins 800 heures.

On rappelle que : $0,002 = \frac{1}{500}$ et on prendra : $e^{-\frac{8}{5}} \simeq 0,202$; $e^{-\frac{1}{5}} \simeq 0,819$.

Partie B

Le taux de pannes d’une centrifugeuse étant trop élevé, son fabricant décide de rappeler les 10000 unités déjà vendues en France en diffusant un communiqué dans la presse.

On estime à 0,1 la probabilité qu’une quelconque de ces centrifugeuses soit retournée à l’un des concessionnaires.

Les retours sont indépendants les uns des autres.

Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de centrifugeuses retournées dans toute la France.

1. Reconnaître la loi de Z . Donner $E(Z)$, $V(Z)$.
2. (a) Justifier que l’on peut approcher la loi de Z par une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$ dont on déterminera les paramètres.

Tous les calculs suivants seront faits avec cette approximation et l’on ne tiendra pas compte de la correction de continuité.

On désigne par Φ la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

- (b) Rappeler pour tout x réel la valeur de $\Phi(x) + \Phi(-x)$.
- (c) Exprimer $P(970 \leq Z \leq 1030)$ en fonction de $\Phi(1)$.
- (d) Déterminer le plus grand entier M tel que $P(Z \geq M) \geq 0,9772$.

Extrait de la table normale centrée réduite : $\Phi(1) \simeq 0,8413$; $\Phi(2) \simeq 0,9772$.