CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE PARIS
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION TECHNOLOGIQUE

MATHEMATIQUES II

Samedi 15 Mai 1999, de 8h. à 12h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'épreuve est composée d'un exercice et d'un problème indépendants.

Exercice

On considère les matrices carrées d'ordre 4 suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

1) Calculer la matrice J^2, puis pour tout entier naturel n non nul, la matrice J^n.

2) a) Exprimer la matrice A en fonction des matrices I et J.

b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $A^n = \frac{1}{5^n} I + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right) J$.

3) On considère les suites numériques $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par leurs premiers termes $p_0 = 1$, $q_0 = r_0 = s_0 = 0$, et, pour tout entier naturel n, par les relations de récurrence :

$$p_{n+1} = \frac{2}{5}p_n + \frac{1}{5}q_n + \frac{1}{5}r_n + \frac{1}{5}s_n$$

$$q_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{2}{5}q_n + \frac{1}{5}r_n + \frac{1}{5}s_n$$

$$r_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}q_n + \frac{2}{5}r_n + \frac{1}{5}s_n$$

$$s_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}q_n + \frac{1}{5}r_n + \frac{2}{5}s_n$$

On note, pour tout entier naturel n, X_n la matrice-colonne suivante : $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \\ s_n \end{pmatrix}$.

a) Vérifier, pour tout entier naturel n, l'égalité matricielle : $X_{n+1} = AX_n$. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $X_n = A^n X_0$.

b) Donner, pour tout entier naturel n non nul, les expressions de p_n, q_n, r_n, s_n en fonction de n.

c) Déterminer les limites des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

d) Pour tout entier naturel n non nul, on pose $G_n = \sum_{i=1}^{n}(-16p_i + 8q_i + 8s_i)$.

Donner, pour tout entier naturel n non nul, l'expression de G_n en fonction de n et en déduire la limite de la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4) *Application à un jeu de hasard*

On suppose qu'un joueur fait avancer un pion sur les quatre cases d'un disque partagé en quadrants numérotés 0, 1, 2, 3 dans le sens des aiguilles d'une montre, selon le protocole suivant :

- au début du jeu, le pion est sur la case 0 ;
- à chaque coup, le joueur tire, de façon équiprobable, un élément k de $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, et avance son pion de k cases, en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre.

On note, pour tout entier naturel n, P_n l'événement « juste avant le $(n+1)^{ième}$ coup, le pion est sur la case 0 », Q_n l'événement « juste avant le $(n+1)^{ième}$ coup, le pion est sur la case 1 », R_n l'événement « juste avant le $(n+1)^{ième}$ coup, le pion est sur la case 2 », S_n l'événement « juste avant le $(n+1)^{ième}$ coup, le pion est sur la case 3 ».

a) À l'aide de la formule des probabilités totales, exprimer, pour tout entier naturel n, les probabilités des événements P_{n+1}, Q_{n+1}, R_{n+1}, S_{n+1}, en fonction des probabilités des événements P_n, Q_n, R_n, S_n.

b) En déduire que ces probabilités sont données par les valeurs des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies à la question 3.

c) Interpréter alors le résultat de la question 3.c).

d) On suppose que, chaque fois que le pion s'arrête sur la case 0, le joueur paye 16 euros et que, chaque fois que le pion s'arrête sur une des cases 1 ou 3, le joueur reçoit 8 euros (dans le cas où le pion s'arrête sur la case 2, rien ne se passe).
Interpréter le nombre G_n de la question 3.d).
Le jeu est-il, en moyenne, favorable au joueur ?

Problème

On dispose d'une urne contenant deux boules, l'une numérotée 1, l'autre 2. On effectue, dans cette urne, une succession de tirages au hasard d'une boule en notant le numéro obtenu, la boule tirée étant remise dans l'urne après chaque tirage. La suite aléatoire des numéros tirés fournit ainsi une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi vérifiant : $\mathbf{P}([X_n = 1]) = \mathbf{P}([X_n = 2]) = \frac{1}{2}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$; S_n désigne donc la somme des numéros obtenus au cours des n premiers tirages.
Un entier naturel N non nul étant donné, on considère la variable aléatoire T_N égale au rang n où, pour la première fois, on a $S_n > N$. Par exemple si $N = 5$ et si les premiers numéros tirés sont $2, 1, 2, 1, 1, \ldots$ alors T_5 prend la valeur 4. De même, toujours si $N = 5$, si les premiers numéros tirés sont $2, 2, 2, 1, 2, \ldots$ alors T_5 prend la valeur 3.

PARTIE I : Préliminaires

1) On considère la suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par la donnée des deux premiers termes, $v_1 = \frac{5}{6}$, $v_2 = \frac{11}{12}$ et, pour tout entier naturel n non nul, par la relation : $v_{n+2} = \frac{1}{2}(v_{n+1} + v_n)$.
   Montrer, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $v_n = \frac{8}{9} + \frac{1}{9}\left(\frac{-1}{2}\right)^n$.
2) On considère la suite réelle $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par la donnée des deux premiers termes, $w_1 = \frac{3}{2}$, $w_2 = \frac{9}{4}$ et, pour tout entier naturel n non nul, par la relation : $w_{n+2} = \frac{1}{2}(w_{n+1} + w_n) + 1$.
   Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie, pour tout entier naturel n non nul, par $v_n = w_n - \frac{2n}{3}$, vérifie les hypothèses de la question précédente et en déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de w_n en fonction de n.

PARTIE II : Étude de la loi de T_N

1) **Exemples**
   a) Donner les lois de T_1 et T_2 ainsi que leurs espérances et variances.
   b) Montrer que les valeurs prises par T_5 sont $3, 4, 5, 6$ et donner le tableau de la loi conjointe de T_5 et X_1.
   On montrera, en particulier, que : $\mathbf{P}([T_5 = 5 \cap X_1 = 2]) = \frac{1}{16}$ et que $\mathbf{P}([T_5 = 4 \cap X_1 = 1]) = \frac{1}{4}$.
   c) Déterminer la loi de T_5, calculer son espérance et sa variance.
   d) Les variables T_5 et X_1 sont-elles indépendantes ? Déterminer la covariance de T_5 et X_1.
   e) Les variables T_5 et X_2 sont-elles indépendantes ?
2) **Calcul de l'espérance de T_N**
   On revient au cas général où N désigne un entier naturel non nul.
   a) i) Déterminer la plus petite et la plus grande valeur prises par T_N dans le cas où N est pair ($N = 2M$).
   ii) Déterminer la plus petite et la plus grande valeur prises par T_N dans le cas où N est impair ($N = 2M + 1$).
   b) Soit k un entier naturel non nul. En conditionnant par le résultat du premier tirage, justifier l'égalité suivante :
   $$\mathbf{P}([T_{N+2} = k]) = \frac{1}{2}\mathbf{P}([T_{N+1} = k-1]) + \frac{1}{2}\mathbf{P}([T_N = k-1]).$$
   c) i) Vérifier les égalités : $\mathbb{E}(T_{N+2}) = \sum_{k=1}^{N+3} k\mathbf{P}([T_{N+2} = k])$ et $\mathbb{E}(T_N) = \sum_{k=0}^{N+2} k\mathbf{P}([T_N = k])$.

ii) Prouver l'égalité : $\sum_{k=1}^{N+3} k\mathbf{P}([T_N = k-1]) = \mathbb{E}(T_N) + 1$.

iii) En déduire l'égalité : $\mathbb{E}(T_{N+2}) = \frac{1}{2}\big(\mathbb{E}(T_N) + \mathbb{E}(T_{N+1})\big) + 1$.

d) À l'aide de la partie I, montrer que, pour tout entier naturel N non nul, on a :

$$\mathbb{E}(T_N) = \frac{6N+8}{9} + \frac{1}{9}\left(\frac{-1}{2}\right)^N$$

Quelle est la limite de la suite de terme général $\frac{\mathbb{E}(T_N)}{N}$?
Pour quelle raison ce résultat est-il plausible ?

3) **La loi de T_N**

On désigne toujours par N un entier naturel non nul.

a) Pour tout entier naturel k non nul, justifier l'égalité : $\mathbf{P}([T_N > k]) = \mathbf{P}([S_k \leqslant N])$.
On rappelle que $S_k = X_1 + X_2 + \ldots + X_k$.
En déduire l'égalité : $\mathbf{P}([T_N > k]) = \mathbf{P}([Z_k \leqslant N-k])$ où Z_k est une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres k et $\frac{1}{2}$.

b) Établir l'égalité : $\mathbf{P}([T_N > k]) = \frac{1}{2^k}\sum_{i=0}^{N-k} \mathrm{C}_k^i$.

On rappelle que le coefficient binomial C_k^i *est nul si* $i > k$.

PARTIE III : Cas particulier où $N = 150$

On **admet** que, pour $N = 150$, la loi de T_{150} peut être approchée, au moins pour les valeurs proches de l'espérance, par la loi de $T = 100 + \frac{10}{3}Y$ où Y est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

1) Déterminer la densité continue de la variable T et donner son tableau de variation.
2) Calculer l'espérance et la variance de la variable T.
3) a) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, établir la minoration suivante : $\mathbf{P}([95 \leqslant T \leqslant 105]) \geqslant \frac{5}{9}$.
   b) Sachant que $\mathbf{P}([Y \leqslant 1,5]) = 0,933$, calculer $\mathbf{P}([95 \leqslant T \leqslant 105])$.
4) Soit F la fonction de répartition de T. Pour tout réel x, on pose $G(x) = F(x+5) - F(x-5)$.
   Étudier les variations de G.
   En déduire la valeur du réel x qui maximise la probabilité $\mathbf{P}([x-5 \leqslant T \leqslant x+5])$.