# ESSEC

CONCOURS D'ADMISSION DE 1999

**Option technologique**

## Mathématiques

*Mardi 18 Mai 1999 de 8h à 12h*

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

## Exercice I : Un problème de placement.

On se propose de comparer les deux placements suivants:
- placer au taux d'intérêt $r$ une somme $2S$ pendant $t$ années.
- placer au taux d'intérêt $2r$ une somme $S$ pendant $t$ années.

1°) Expressions des sommes obtenues à l'issues de $t$ années de placement.

a) On place une somme de $2S$ francs au taux d'intérêt $r$ pendant une année. De quelle somme dispose-t-on à l'issue de l'année de placement?

b) Déterminer la somme $S_1(t)$ obtenue en plaçant au taux d'intérêt $r$ une somme de $2S$ francs durant $t$ années.

c) On place une somme de $S$ francs au taux d'intérêt $2r$ pendant une année. De quelle somme dispose-t-on à l'issue de l'année de placement?

d) Déterminer la somme $S_2(t)$ obtenue en plaçant au taux d'intérêt $2r$ une somme de $S$ francs durant $t$ années.

e) Déterminer en fonction de $r$ le nombre réel $t$ défini par l'égalité $S_1(t) = S_2(t)$.

2°) Etude du temps d'égalisation des sommes obtenues en fonction de $r$.

On pose pour tout nombre réel strictement positif $r$:

$$T(r)=\frac{\ln 2}{\ln(1+2r)-\ln(1+r)}.$$

a) Déterminer la dérivée et le sens de variation sur $]0, +\infty[$ de la fonction $r \to \ln(1+2r) - \ln(1+r)$.

b) En déduire le sens de variation de $T(r)$ lorsque $r$ croît de 0 à $+\infty$.

c) Déterminer les limites de $T(r)$ lorsque $r$ tend vers 0 et $+\infty$, et un équivalent de $T(r)$ lorsque $r$ tend vers 0.

ESSEC
AVENUE BERNARD HIRSCH - B.P. 105
95021 CERGY-PONTOISE CEDEX FRANCE
TÉL.: 33 (0) 1 34 43 30 00
FAX : 33 (0) 1 34 43 30 01

ÉTABLISSEMENT D'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR PRIVÉ.
RECONNU PAR L'ÉTAT. MEMBRE DE LA FESIC.

GROUPE ESSEC.
ETABLISSEMENTS D'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR PRIVÉS.
ASSOCIATION LOI 1901.
ACCREDITÉ AACSB - THE INTERNATIONAL ASSOCIATION FOR MANAGEMENT EDUCATION.
AFFILIÉ À LA CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE VERSAILLES VAL D'OISE-YVELINES.

**Exercice II : Probabilités.**

On rappelle que, si $x$ désigne un nombre réel strictement compris entre 0 et 1, alors:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Une expérience aléatoire consiste à lancer deux dés équilibrés simultanément, et l'on répète indéfiniment cette expérience.

1°) Etude du temps d'attente pour obtenir un double six.

On note $T$ la variable aléatoire indiquant le numéro de l'expérience aléatoire où l'on obtient pour la première fois un double six (c'est à dire où les deux dés donnent simultanément un six).

a) Quelle est la probabilité $P(T=1)$ pour qu'un double six soit obtenu à la première expérience?

b) Quelle est la probabilité $P(T=n)$ pour que ce soit à la $n^{ième}$ expérience que, pour la première fois, les deux dés amènent simultanément un six ($n \geq 1$)?

c) Déterminer la somme de la série de terme général $P(T=n)$ pour $n \geq 1$.

d) Déterminer l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire $T$.

2°) Etude du temps d'attente pour qu'au moins un dé ait amené un six.

On note $T'$ la variable aléatoire indiquant le numéro de l'expérience aléatoire où l'on obtient pour la première fois un six (c'est à dire où l'un des deux dés au moins donne un six).

a) Quelle est la probabilité pour qu'aucun six ne soit obtenu à la première expérience, et que vaut $P(T'=1)$?

b) Quelle est la probabilité $P(T'=n)$ pour que ce soit à la $n^{ième}$ expérience que, pour la première fois, l'un des dés amène un six ($n \geq 1$)?

c) Déterminer la somme de la série de terme général $P(T'=n)$ pour $n \geq 1$.

d) Déterminer (sous forme de fraction irréductible) l'espérance $E(T')$ de la variable aléatoire $T'$.

3°) Etude du temps d'attente pour que chacun des dés ait amené un six.

On note $T''$ la variable aléatoire indiquant le numéro de l'expérience aléatoire où, pour la première fois, chacun des dés a amené au moins un six (si on représente par un couple $(x, y)$ le résultat indiquant les numéros $x$ et $y$ amenés par le premier et le second dés, et si les résultats des expériences sont, dans cet ordre $(1, 4)$, $(6, 5)$, $(6, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 6)$, etc, alors $T''$ prend la valeur 5 car c'est à ce moment là que, pour la première fois, chacun des dés a amené au moins un six).

a) Quelle est la probabilité pour qu'un dé n'amène aucun six au cours de ses $n$ premiers jets? Pour qu'un dé amène au moins un six au cours de ses $n$ premiers jets?

b) Quelle est la probabilité $P(T'' \leq n)$ pour que chacun des dés ait amené au moins un six au cours des $n$ premiers jets ($n \geq 1$)?

c) Quelle est la probabilité $P(T''=n)$ pour que ce soit à la $n^{ième}$ expérience que, pour la première fois, chacun des dés ait amené au moins un six ($n \geq 1$)?

d) Déterminer la somme de la série de terme général $P(T''=n)$ pour $n \geq 1$.

e) Déterminer (sous forme de fraction irréductible) l'espérance $E(T'')$ de la variable aléatoire $T''$.

4°) Comparer les trois espérances $E(T)$, $E(T')$ et $E(T'')$.

## Exercice III : Analyse.

1°) Etude d'une fonction auxiliaire.

a) Calculer, pour $0 < x \leq 1$, la dérivée de la fonction définie par $h(x) = -\ln(x) + x - 1$.

b) Dresser le tableau de variation de $h$, et en déduire le signe de $h(x)$ pour $0 < x < 1$.

2°) Etude sur $]0, 1[$ de la fonction $x \to x\ln(x)/(x-1)$.

On considère la fonction définie pour $0 < x < 1$ par:

$$S(x) = \frac{x\ln(x)}{x-1}.$$

a) Déterminer la dérivée de la fonction $x \to x\ln(x)$ et la valeur du nombre dérivé pour $x = 1$. En déduire la limite de $S(x)$ quand $x$ tend vers 1.

b) Déterminer la limite de $S(x)$ quand $x$ tend vers 0.
On supposera désormais que cette fonction $S$ est prolongée par continuité en 0 et en 1 par les limites précédentes.

c) Calculer la dérivée de $S$ sur $]0, 1[$ et vérifier que $S'(x)$ est du signe de $h(x)$. En déduire alors le sens de variation de $S$ que l'on représentera graphiquement sur $[0, 1]$.
(On pourra étudier les tangentes à la courbe représentative de $S$ en 0 et 1 afin de les placer).

3°) Etude sur $]0, 1]$ des fonctions $x \to x^n\ln(x)$.

On considère un nombre entier $n \geq 1$ donné, et la fonction définie pour $0 < x \leq 1$ par:

$$f_n(x) = -x^n\ln(x).$$

a) Déterminer la limite de $f_n(x) = -x^n\ln(x)$ lorsque $x$ tend vers 0. On supposera désormais que cette fonction $f_n$ est prolongée par continuité en 0 par la limite précédente.

b) Calculer la dérivée de $f_n$ sur $]0, 1]$. En déduire alors le sens de variation de $f_n$, et représenter graphiquement sur la figure précédente les fonctions $f_n$ sur $[0, 1]$ pour $n = 1$ et 2 (on rappelle à cet effet que $1/e$ est approximativement égal à 0.36).

c) Déterminer à l'aide d'une intégration par parties la valeur de l'intégrale suivante:

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)dx.$$

4°) Etude de la somme des fonctions $f_n$.

a) Déterminer, pour tout nombre réel $x$ tel que $0 \leq x \leq 1$ et tout nombre entier $n$ tel que $n \geq 1$, l'expression factorisée de la somme suivante:

$$S_n(x) = -\sum_{k=1}^{n} x^k \ln(x).$$

b) Vérifier que, pour $0 \leq x < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = S(x)$.

c) Vérifier que, pour $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq S(x) - S_n(x) \leq x^n$, puis en déduire que l'intégrale de $S$ sur $[0, 1]$ est la limite des intégrales de $S_n$ sur $[0, 1]$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$, autrement dit que:

$$\int_0^1 \frac{x\ln(x)}{x-1}dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$$

(On peut prouver que cette dernière somme est égale à $\pi^2/6 - 1$).

***