edhec

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD
EDHEC GRADUATE SCHOOL OF MANAGEMENT

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option économique

Mercredi 3 mai 2000, de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

1) Déterminer l'ensemble D des réels x tels que $e^x - e^{-x} > 0$.

On définit la fonction f par : $\forall x \in D$, $f(x) = \ln(e^x - e^{-x})$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2) a. Étudier les variations de f et donner les limites de f aux bornes de D.

b. En déduire l'existence d'un unique réel α vérifiant $f(\alpha) = 0$, puis donner la valeur exacte de α.

c. Montrer que le coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse α vaut $\sqrt{5}$.

3) a. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x)$.

b. En déduire l'équation de l'asymptote (Δ) à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

c. Donner la position relative de (Δ) et (C).

4) Donner l'allure de la courbe (C) en faisant figurer les droites (Δ) et (T).

On admettra que $\alpha \simeq 0{,}5$ et que $\sqrt{5} \simeq 2{,}2$.

5) Soit λ un réel, on note g_λ la fonction définie par : $\begin{cases} g_\lambda(x) = 0 & si \quad x < \alpha \\ g_\lambda(x) = \dfrac{\lambda}{e^{2x} - 1} & si \quad x \geq \alpha \end{cases}$

a. On pose $h(x) = f(x) - x$. Après avoir calculé $h'(x)$, déterminer λ en fonction de α pour que g_λ soit une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire X.

b. Donner la fonction de répartition G_λ de X.

Exercice 2

Soit la matrice $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On note E l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant : $MK = KM = M$.

1) a. Montrer que E est un espace vectoriel.
   b. Montrer par l'absurde qu'aucune matrice de E n'est inversible.

2) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$ une matrice de E.

   a. Montrer que : $k = g = c = a$, $h = b$ et $f = d$, puis en déduire la forme des matrices de E.
   b. Retrouver le fait que les matrices de E ne sont pas inversibles.
   c. Déterminer une base de E et vérifier que $\dim E = 4$.

3) On considère l'ensemble F des matrices de la forme $\begin{pmatrix} x & y & x \\ y & z & y \\ x & y & x \end{pmatrix}$ où x, y et z sont des réels.

   a. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E et donner une base de F.
   b. Les matrices de F sont-elles diagonalisables ?
   c. Dans cette question, on appelle U la matrice de F telle que : $x = 3$, $y = 2$ et $z = 4$. Trouver les valeurs propres de U et exhiber un vecteur colonne propre pour chacune d'entre elles.

4) On note φ l'application de F dans $\mathbb{R}$ qui à toute matrice A de F associe le nombre $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(-1)^{i+j}a_{i,j}$, où $a_{i,j}$ désigne l'élément de la matrice A situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne.

   a. Montrer que φ est une application linéaire de F dans $\mathbb{R}$.
   b. Déterminer $\operatorname{Im}\varphi$. En déduire que $\operatorname{Ker}\varphi$ est de dimension 2.
   c. Soit $M = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & z & y \\ x & y & x \end{pmatrix}$ une matrice de $\operatorname{Ker}\varphi$.

   Exprimer $\varphi(M)$ en fonction de x, y et z et en déduire une base de $\operatorname{Ker}\varphi$.

Exercice 3

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on définit la fonction f_n par :
$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$.

1) a. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ n'a qu'une seule solution strictement positive, notée u_n.
   b. Calculer u_1 et u_2.
   c. Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in]0, \frac{2}{3}[$.
2) a. Montrer que, pour tout x élément de $]0, 1[$, on a : $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
   b. En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$, puis les variations de la suite (u_n).
   c. Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
3) a. Déterminer la limite de $(u_n)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   b. Donner enfin la valeur de ℓ.
4) Montrer que la série de terme général $\frac{2}{3} - u_n$ est convergente.

Problème

On lance indéfiniment une pièce donnant "*Pile*" avec la probabilité p et "*Face*" avec la probabilité $q = 1 - p$. On suppose que $p \in]0, 1[$ et on admet que les lancers sont mutuellement indépendants.
Pour tout entier naturel k, supérieur ou égal à 2, on dit que le $k^{\text{ème}}$ lancer est un changement s'il amène un résultat différent de celui du $(k-1)^{\text{ème}}$ lancer.
On note P_k (resp F_k) l'événement : « on obtient "*Pile*" (resp "*Face*") au $k^{\text{ème}}$ lancer ».
Pour ne pas surcharger l'écriture on écrira, par exemple, $P_1 F_2$ à la place de $P_1 \cap F_2$.
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de changements survenus durant les n premiers lancers.

Partie 1 : étude de quelques exemples.

1) Donner la loi de X_2.
2) a. Donner la loi de X_3.
   b. Vérifier que $E(X_3) = 4pq$ et que $V(X_3) = 2pq\,(3 - 8pq)$.
3) a. Trouver la loi de X_4.
   b. Calculer $E(X_4)$.

Partie 2 : étude du cas $p \neq q$.

Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1) Exprimer $P(X_n = 0)$ en fonction de p, q et n.

2) En décomposant l'événement $(X_n = 1)$ en une réunion d'événements incompatibles, montrer que $P(X_n = 1) = \dfrac{2pq}{q-p}(q^{n-1} - p^{n-1})$.

3) En distinguant les cas n pair et n impair, exprimer $P(X_n = n-1)$ en fonction de p et q.

4) Retrouver, grâce aux trois questions précédentes, les lois de X_3 et X_4.

5) Pour tout entier naturel k, supérieur ou égal à 2, on note Z_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le $k^{\text{ème}}$ lancer est un changement et 0 sinon (Z_k est donc une variable de Bernoulli). Écrire X_n à l'aide de certaines des variables Z_k et en déduire $E(X_n)$.

Partie 3 : étude du cas $p = q$.

1) Vérifier, en utilisant les résultats de la partie 1, que X_3 et X_4 suivent chacune une loi binomiale.

2) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, X_n suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.