Épreuve de Mathématiques I

Le sujet

Le problème avait pour objet l'étude des lois de premier et second retours à l'origine dans la marche aléatoire standard sur $\mathbb{Z}$, en utilisant des techniques relevant principalement de l'analyse.

Ainsi, dans la partie I, on obtenait le développement en série entière (c'est-à-dire sous la forme $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$) de la fonction $x \hookrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

La partie II permettait de prouver l'existence presque sûre d'un premier retour à l'origine et de déterminer la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}\big([T > n]\big)x^n$.

Les parties III et IV avaient pour objet la détermination d'équivalents de la somme partielle d'une série, d'une part, et du terme général d'une série divergente, d'autre part.
La partie V effectuait la synthèse de tous les résultats précédents afin d'obtenir d'une part, l'ordre de grandeur de la queue de la distribution du premier retour à l'origine et, d'autre part, les lois de premier et second retours à l'origine.

Tous ces résultats pouvaient être obtenus plus directement par des raisonnements de type combinatoire, mais la démarche choisie dans ce problème permettait de faire travailler les candidats sur une large partie du programme d'analyse, à partir d'un thème probabiliste.

Les résultats obtenus

La note moyenne obtenue par l'ensemble des candidats est de $8,78$ avec un écart-type de $4,26$.
Cette épreuve a permis d'établir un bon classement des candidats en utilisant toute l'échelle de notation.
Malgré la difficulté du sujet, le nombre de bonnes ou de très bonnes copies a été tout à fait significatif.

Commentaire détaillé

Dans l'ensemble, les candidats sont bien préparés à cette épreuve, ce qui se traduit notamment par une bonne présentation des copies et l'usage peu fréquent «d'arguments» tels que «d'après le cours», «il est clair que», etc.
La partie I a été bien réussie dans l'ensemble.
I.3.a On relève peu de démonstrations utilisant un raisonnement combinatoire.

I.3.b On trouve de nombreuses erreurs dans la manipulation des inégalités.

I.3.c Cette question exigeait du soin et a souvent été bien traitée.

II La référence à la particule permettait d'aider les candidats dans leur argumentation mais ne les dispensait pas de recourir à une démonstration précise.

II.1.a Il fallait utiliser des probabilités conditionnelles, faute de quoi les preuves sont inconsistantes car elles s'appuient sur des arguments douteux voire tout à fait faux tels que «les X_k sont indépendantes donc les S_k aussi».

Ce type de question permet de mesurer le degré d'apprentissage et d'assimilation des fondements indispensables du programme de probabilités qui permettent d'aborder avec succès un certain nombre de calculs.

II.1.b Cette question nécessitait la vérification de la convergence des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$.

III.1.a Peu de candidats trouvent le bon résultat. D'autres traitent convenablement la question b) sans faire le rapprochement avec la question a).

III.1.b L'intégrabilité locale d'une fonction n'est pas au programme, il faut invoquer la continuité de la fonction. Cette question s'est révélée très discriminante.

III.2 Beaucoup de candidats n'ont pas vu qu'il suffisait d'utiliser la question précédente avec un argument de linéarité.

III.3.b La convergence de la série devient évidente dès lors que l'on a démontré que, pour k assez grand. $h(x^k) = 0$ (on fait alors une somme finie).

IV.1. Cette question a été bien traitée en général.

IV.2.a On voit souvent $\gamma n \sim n$.

IV.3 Seuls, quelques candidats résolvent correctement cette question qui est, sans doute, la question la plus difficile du problème.

C'est certainement par manque de temps que la partie V a rarement été abordée.