

CONCOURS D'ADMISSION DE 2000

**Option scientifique**

**MATHEMATIQUES II**

*Lundi 15 Mai 2000 de 8h à 12h*

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.  
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.  
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

On considère un combat entre trois tireurs A, B, C, qui se déroule en une suite d'épreuves de la façon suivante, jusqu'à élimination d'au moins deux des trois tireurs :

- Tous les tirs sont indépendants les uns des autres.
- Lorsque A tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à  $2/3$ .
- Lorsque B tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à  $1/2$ .
- Lorsque C tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à  $1/3$ .
- Lorsque qu'un des tireurs est atteint, il est définitivement éliminé des épreuves suivantes.
- A chacune des épreuves, les tireurs non encore éliminés tirent simultanément et chacun d'eux vise le plus dangereux de ses rivaux non encore éliminés.

*(Ainsi, à la première épreuve, A vise B tandis que B et C visent A).*

Pour tout nombre entier  $n \geq 1$ , on considère les événements suivants :

$ABC_n$  : « à l'issue de la  $n^{\text{ième}}$  épreuve, A, B et C ne sont pas encore éliminés ».

$AB_n$  : « à l'issue de la  $n^{\text{ième}}$  épreuve, seuls A et B ne sont pas encore éliminés ».

On définit de façon analogue les événements  $BC_n$  et  $CA_n$ .

$A_n$  : « à l'issue de la  $n^{\text{ième}}$  épreuve, seul A n'est pas éliminé ».

On définit de façon analogue les événements  $B_n$  et  $C_n$ .

$\emptyset_n$  : « à l'issue de la  $n^{\text{ième}}$  épreuve, les trois tireurs sont éliminés ».

Enfin,  $ABC_0$  est l'événement certain,  $AB_0, BC_0, CA_0, A_0, B_0, C_0, \emptyset_0$  l'événement impossible.

## PARTIE I

On détermine dans cette partie I les probabilités pour que A, B, C remportent le combat.

### 1°) Calcul de probabilités.

- Exprimer, si U et V désignent deux événements quelconques d'un espace probabilisé donné, la probabilité  $p(U \cup V)$  de l'événement  $U \cup V$  en fonction de  $p(U)$ ,  $p(V)$  et  $p(U \cap V)$ .
- En déduire la probabilité pour qu'à une épreuve à laquelle participent A, B, C :  
(A rate son tir) et (B ou C réussissent leur tir).
- En déduire la probabilité pour qu'à une épreuve à laquelle participent A, B, C :  
(A réussit son tir) et (B ou C réussissent leur tir).

### 2°) Détermination de probabilités conditionnelles

- Montrer que l'événement  $AB_n$  est impossible pour tout nombre entier naturel  $n$ .  
Dans la suite, on ne considérera donc que les événements  $ABC_n, BC_n, CA_n, A_n, B_n, C_n, \emptyset_n$ .
- Expliciter la probabilité conditionnelle  $p(ABC_{n+1} / ABC_n)$ .
- Expliciter  $p(BC_{n+1} / ABC_n)$  à l'aide de la question 1°, puis donner  $p(CA_{n+1} / ABC_n)$ .
- Expliciter  $p(A_{n+1} / ABC_n)$ ,  $p(B_{n+1} / ABC_n)$  et  $p(C_{n+1} / ABC_n)$ .
- Expliciter  $p(A_{n+1} / CA_n)$ ,  $p(B_{n+1} / BC_n)$ ,  $p(C_{n+1} / CA_n)$  et  $p(C_{n+1} / BC_n)$ .
- Expliciter  $p(\emptyset_{n+1} / ABC_n)$ ,  $p(\emptyset_{n+1} / BC_n)$  et  $p(\emptyset_{n+1} / CA_n)$ .

### 3°) Nombre moyen d'épreuves à l'issue desquelles s'achève le combat

On note  $T$  la variable aléatoire indiquant le nombre d'épreuves à l'issue duquel cesse le combat, c'est à dire au delà duquel il ne reste qu'un tireur au plus.

- Quelle est la probabilité de l'événement  $T = 1$  ?
- Soit  $n \geq 2$ . Calculer la probabilité de l'événement suivant :  
 $ABC_1 \cap ABC_2 \cap \dots \cap ABC_{n-1} \cap ABC_n$ .
- Soit  $n \geq 2$ . Calculer la probabilité de la réunion des événements suivants pour  $0 \leq k \leq n-1$  :  
 $ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \dots \cap CA_n$   
(pour  $k = 0$ , il s'agit de l'événement  $CA_1 \cap CA_2 \cap \dots \cap CA_n$ ).
- Soit  $n \geq 2$ . Calculer la probabilité de la réunion des événements suivants pour  $0 \leq k \leq n-1$  :  
 $ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \cap \dots \cap BC_n$   
(pour  $k = 0$ , il s'agit de l'événement  $BC_1 \cap BC_2 \cap \dots \cap BC_n$ ).
- Soit  $n \geq 2$ . Calculer la probabilité  $p(T > n)$  pour que le combat ne soit pas terminé à l'issue de la  $n^{\text{ième}}$  épreuve, et en déduire la probabilité  $p(T = n)$  (on vérifiera que cette formule redonne bien pour  $n = 1$  le résultat obtenu à la question a).
- Vérifier que la somme de la série de terme général  $p(T = n)$  (avec  $n \geq 1$ ) est égale à 1, puis déterminer sous forme de fraction irréductible l'espérance  $E(T)$  de la variable aléatoire  $T$ .

### 4°) Probabilités pour que A, B, C remportent le combat

- Montrer que l'événement « A remporte le combat à l'issue de la  $n^{\text{ième}}$  épreuve » est impossible si  $n = 1$ , et montrer qu'il est égal à la réunion des événements suivants si  $n \geq 2$  :  
 $ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \dots \cap CA_{n-1} \cap A_n$  pour  $0 \leq k \leq n-2$   
(pour  $k = 0$ , il s'agit de l'événement  $CA_1 \cap CA_2 \cap \dots \cap CA_{n-1} \cap A_n$ ).
- Calculer la probabilité pour que A remporte le combat à l'issue de la  $n^{\text{ième}}$  épreuve ( $n \geq 2$ ).
- En déduire la probabilité pour que A remporte le combat (c'est à dire pour qu'il ne soit pas éliminé à l'issue du combat).
- Déterminer de même la probabilité pour que B remporte le combat.
- Déterminer de même la probabilité pour que C remporte le combat.

## PARTIE II

Dans cette partie, on retrouve par des méthodes matricielles les probabilités pour que A, B, C remportent le combat en n'utilisant que les résultats des questions I.1° et I.2°.

### 1°) Expression de la matrice de transition M

a) On considère la matrice-colonne  $E_n$  à sept lignes dont les sept éléments sont dans cet ordre, du haut vers le bas,  $p(ABC_n), p(BC_n), p(CA_n), p(A_n), p(B_n), p(C_n), p(\emptyset_n)$ .

Expliciter une matrice  $M$  carrée d'ordre 7 vérifiant pour tout nombre entier naturel  $n$  :

$$E_{n+1} = ME_n.$$

On vérifiera que la somme de chacune des sept colonnes de cette matrice  $M$  est égale à 1.

b) En déduire  $E_n$  en fonction de  $n$ , de  $M$  et  $E_0$ .

### 2°) Calcul des puissances de la matrice M

a) On considère deux matrices carrées d'ordre 3 notées  $U', U''$  et deux matrices rectangulaires à 4 lignes et 3 colonnes notées  $V', V''$  et l'on forme les matrices carrées d'ordre 7 :

$$M' = \begin{bmatrix} U' & O \\ V' & I_4 \end{bmatrix}, \quad M'' = \begin{bmatrix} U'' & O \\ V'' & I_4 \end{bmatrix}$$

où  $O$  désigne la matrice nulle à 3 lignes et 4 colonnes et  $I_4$  la matrice-identité d'ordre 4.

Vérifier à l'aide des règles du produit matriciel l'égalité suivante :

$$M'M'' = \begin{bmatrix} U'U'' & O \\ V'U'' + V'' & I_4 \end{bmatrix}.$$

b) Expliciter les matrices  $U$  et  $V$  telles que :

$$M = \begin{bmatrix} U & O \\ V & I_4 \end{bmatrix}.$$

c) Etablir enfin par récurrence sur  $n \geq 1$  l'égalité suivante :

$$M^n = \begin{bmatrix} U^n & 0 \\ V + VU + \dots + VU^{n-1} & I_4 \end{bmatrix}.$$

### 3°) Diagonalisation de la matrice U

a) Déterminer les valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  de  $U$  avec  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$  et les vecteurs propres associés  $V_1, V_2, V_3$  tels que :

- la première composante de  $V_1$  vaut 1.
- la troisième composante de  $V_2$  vaut 1.
- la deuxième composante de  $V_3$  vaut 1.

b) On note  $P$  la matrice d'ordre 3 dont les vecteurs-colonnes sont, dans cet ordre,  $V_1, V_2, V_3$ . Expliciter la matrice inverse  $P^{-1}$  et préciser la matrice  $D = P^{-1}UP$ .

### 4°) Calcul de la limite des puissances de la matrice M

a) Expliciter les matrices  $D^n$  et  $I_3 + D + D^2 + \dots + D^{n-1}$ .

b) On dit qu'une suite de matrices  $(X_n)$  à  $p$  lignes et  $q$  colonnes converge vers une matrice  $X$  à  $p$  lignes et  $q$  colonnes si chaque coefficient de la matrice  $X_n$  converge quand  $n$  tend vers  $+\infty$  vers le coefficient correspondant de la matrice  $X$ .

On admettra (sous réserve d'existence) que la limite d'un produit est le produit des limites. Expliciter à l'aide des résultats précédents les limites des deux suites matricielles  $(D^n)$  et  $(I_3 + D + D^2 + \dots + D^{n-1})$ , puis des trois suites matricielles  $(U^n)$ ,  $(I_3 + U + U^2 + \dots + U^{n-1})$  et  $(V + VU + VU^2 + \dots + VU^{n-1})$ .

- c) En déduire enfin les limites des deux suites matricielles  $(M^n)$  et  $(E_n)$ .
- d) Vérifier que les suites  $(p(ABC_n))$ ,  $(p(BC_n))$  et  $(p(CA_n))$  convergent vers 0 et expliciter sous forme d'une fraction irréductible les limites des suites  $(p(A_n))$ ,  $(p(B_n))$ ,  $(p(C_n))$ ,  $(p(\emptyset_n))$ .  
Retrouver alors les probabilités obtenues en I pour que A, B, C remportent le combat.

\*\*\*