



ECRICOME

Banque d'épreuves écrites communes aux concours des Ecoles

ESC Bordeaux, ESC Marseille-Provence, ESC Reims, ESC Rouen, ICN Nancy

J. 4740

CONCOURS D'ADMISSION 2001

Option lettres et sciences humaines
ULM BL

MATHÉMATIQUES

Mercredi 25 avril 2001 de 14 h 00 à 17 h 00

Durée : 3 heures

Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 2 pages.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

Tournez la page S.V.P.

PROBLÈME I

L'entier n étant strictement positif, on pose : $S_n = \sum_1^n (1/k)$, $a_n = S_n - \ln(n)$ et $b_n = a_{n+1} - a_n$.

1.a. Montrer que pour tout réel $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.

b. En déduire que pour tout entier $n > 0$, et pour tout réel $t \leq n$, $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$.

2. On veut montrer que pour tout t de $[0; n]$, $0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2}{n} e^{-t}$: (I).

a. Étudier les variations de la fonction $h : [0; \sqrt{n}[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$h(t) = t + n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) - \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right).$$

b. En déduire que les inégalités (I) sont vraies pour $t \in [0; \sqrt{n}[$.

c. Montrer qu'elles le sont encore sur $[\sqrt{n}; n]$.

3. On pose : $I_n = \int_0^n \frac{e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}{t} dt$.

a. Justifier l'existence de cette intégrale.

b. Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (I_n) = 0$.

4.a. Exprimer $\sum_{k=0}^{n-1} \left[\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^k dt \right]$ en fonction de S_n .

b. En utilisant une factorisation de l'expression $1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$, montrer que :

$$J_n = \int_0^n \frac{1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}{t} dt = S_n.$$

5.a. Donner le développement limité en $1/n$, à l'ordre 2, de b_n , quand n tend vers l'infini ; en déduire la nature de la série $\sum b_n$.

b. Montrer que la suite $(a_n)_n$ converge ; on désignera par α la limite, que l'on ne cherchera pas à calculer, de la suite $(a_n)_n$.

6.a. Justifier l'existence des deux intégrales :

$$K = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt \quad \text{et} \quad L = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

b. En étudiant l'expression $J_n - I_n$, montrer que $K - L = \alpha$.

7. Prouver la convergence et exprimer la valeur de l'intégrale : $M = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t} - e^{-\frac{1}{t}}}{t} dt$ en fonction de α .

8.a. Pour $x > 0$, montrer que $\int_0^x \frac{1 - e^{-t}}{t} dt = \alpha + \ln x + \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

b. Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt + \ln x \right) = -\alpha$.

9. Après en avoir prouvé la convergence, calculer l'intégrale $N = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t dt$.

10. Pour a et b strictement positifs, justifier la convergence et calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt.$$

PROBLÈME II

Dans ce problème, n est un entier naturel et $M_3(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

I est la matrice unitaire de $M_3(\mathbb{R})$, et M est la matrice $\begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, représentant

l'endomorphisme m dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

1.a. Calculer $A = \frac{1}{4}(M - I)$, puis A^2 .

b. Démontrer que pour tout n de \mathbb{N} , $M^n = I + u_n A$, u_n étant le terme général d'une suite réelle.

c. Calculer u_{n+1} en fonction de u_n , puis en fonction de n ; en déduire l'expression de M^n .

2. Soit J la matrice $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; calculer J^2 puis J^n ; montrer que J n'est pas inversible.

3. On considère l'ensemble E des matrices de la forme $aI + bJ$ où a et b sont deux réels quelconques.

a. Montrer que : $M \in E$.

b. En déduire l'expression de M^n en fonction de I et de J ; comparer au résultat obtenu précédemment.

4.a. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres correspondants de l'endomorphisme j associé à J ; en déduire que M est diagonalisable.

b. Donner la matrice P de passage de la base canonique à une base B dans laquelle la matrice de j est une matrice diagonale D .

c. Calculer D^n ; retrouver alors M^n .