



**ECRICOME**

Banque d'épreuves écrites communes aux concours des Ecoles

ESC Bordeaux, ESC Marseille-Provence, ESC Reims, ESC Rouen, ICN Nancy

J. 4714

## CONCOURS D'ADMISSION 2001

Option scientifique

# MATHÉMATIQUES

Mardi 24 avril 2001 de 8 h 00 à 12 h 00

Durée : 4 heures

**Aucun instrument de calcul n'est autorisé.**

**Aucun document n'est autorisé.**

L'énoncé comporte 5 pages.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

**Tournez la page S.V.P.**

### Exercice 1

Soient  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs,  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes, suivant chacune une loi exponentielle de paramètres respectifs  $a$  et  $b$ .

- 1) Déterminer la fonction de répartition, puis une densité, de la variable aléatoire  $-X$ .
- 2) Montrer que  $Y - X$  admet une densité, notée  $h$ , définie par :

$$h(t) = \frac{ab}{a+b} \exp(-bt) \text{ pour } t > 0 \text{ et } h(t) = \frac{ab}{a+b} \exp(at) \text{ pour } t \leq 0.$$

On considère la variable aléatoire  $Z = |X - Y|$ .

- 3) Soit  $s$  un réel positif. Etablir l'égalité  $P(Z \leq s) = 1 - \frac{b \exp(-as) + a \exp(-bs)}{a+b}$ .
- 4) a) Montrer que  $Z$  est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.  
b) Montrer que  $Z$  admet une espérance et la calculer.

### Exercice 2

Soient  $n$  un entier  $\geq 2$  et  $E$  l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients réels.  $I$  est la matrice identité de  $E$ . On note  ${}^tA$  la transposée d'un élément  $A$  de  $E$ . Si  $A = (a_{ij})$  appartient à  $E$ , on appelle trace de  $A$  et on note  $\text{tr}(A)$ , la somme  $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$  des éléments diagonaux de  $A$ . On considère l'application  $g$  de  $E \times E$  dans  $\mathbb{R}$ , qui à deux matrices  $A$  et  $B$  de  $E$  fait correspondre le réel  $g(A, B) = \text{tr}({}^tAB)$ .

- 1) Montrer que l'application  $\text{tr}$  qui à tout élément de  $E$  associe sa trace, est une forme linéaire sur  $E$ .
- 2) a) Soit  $M$  une matrice de  $E$ . Montrer que  $\text{tr}(M) = \text{tr}({}^tM)$ .  
b) En déduire que, pour tout couple  $(A, B)$  de matrices de  $E$ , on a  $g(A, B) = g(B, A)$ .
- 3) Soit  $A$  un élément de  $E$ . Montrer que  $g(A, A)$  est la somme des carrés des coefficients de  $A$ .
- 4) Montrer, à l'aide des questions précédentes, que  $g$  est un produit scalaire sur  $E$ .

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  et  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  défini par :

$$f(e_1) = e_n \text{ et, pour tout entier } k \text{ tel que } 2 \leq k \leq n, f(e_k) = e_{k-1}.$$

- 5) a) Montrer que  $f$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}^n$ .  
b) Soit  $U$  la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Montrer que  $U^n = I$  et que  $U^{-1} = {}^tU$ .

On suppose, pour les deux questions suivantes, que  $n = 4$ .

- 6) Calculer  $U^2$  et  $U^3$  et montrer que  $(I, U, U^2, U^3)$  est une famille orthogonale pour le produit scalaire  $g$ .
- 7) On note  $F$  le sous espace vectoriel de  $E$  engendré par la famille  $(I, U, U^2, U^3)$  et  $V$  la matrice de  $E$  dont la première ligne est constituée de 1 et les autres uniquement de 0. Calculer la projection orthogonale  $W$  de  $V$  sur  $F$ .

**Problème**

Dans tout le problème,  $n$  est un entier positif ou nul,  $a$  un entier pair supérieur ou égal à 4 et  $p$  un réel tel que  $0 < p < 1$ . Pour simplifier les écritures, on pose  $a_n = 2^{n-1}a$ .

Un jeu est une succession de jets d'une pièce qui fait pile avec la probabilité  $p$ . Un joueur dispose initialement d'une fortune  $a$ . On note  $F_n$  la variable aléatoire égale à la fortune du joueur à l'issue du  $n^{\text{ème}}$  lancer. On convient que  $F_0$  est la variable aléatoire certaine égale à  $a$ . On obtient la fortune  $F_{n+1}$  à partir de  $F_n$  de la manière suivante :

avant le lancer  $n+1$ , le joueur mise une partie  $X_n$ , entière, de sa fortune sur pile et l'autre partie,  $F_n - X_n$ , sur face. Si le lancer  $n+1$  fait apparaître pile, la fortune  $F_{n+1}$  est égale à  $2X_n$ , s'il fait apparaître face, la fortune  $F_{n+1}$  est égale à  $2(F_n - X_n)$ . Ainsi, à tout instant, la fortune du joueur est un entier pair, éventuellement nul.

On étudie, dans ce problème, deux exemples ( parties 1 et 2 ) dans lesquels les mises  $X_n$  sont des variables aléatoires. A cet effet, on associe aux variables aléatoires  $F_n$  des polynômes  $G_n$  dont les propriétés générales sont établies en préliminaire. Ces polynômes servent à obtenir des informations sur l'évolution de la fortune du joueur tout au long du jeu.

$E(X)$  et  $V(X)$  désignent, quand elles existent, l'espérance et la variance de  $X$ .

**Résultats préliminaires .**

1) Pour tout entier positif ou nul  $n$ , montrer que  $F_n$  prend ses valeurs dans  $\{ 0, 2, 4, \dots, 2a_n \}$ .

Pour tout entier positif ou nul  $n$ , on définit le polynôme  $G_n$  par : 
$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{a_n} P(F_n = 2k)x^k$$

2) a) Calculer  $G_n(1)$ .

b) Que représente concrètement  $G_n(0)$  ? Montrer, à l'aide d'un argument probabiliste, que la suite de terme général  $G_n(0)$  est croissante et convergente.

c) Montrer que  $G'_n(1) = E(F_n) / 2$ . Etablir de même que  $V(F_n) = 4G''_n(1) + 2E(F_n) - E(F_n)^2$ .

3) Montrer que le polynôme  $G_n$  est convexe sur  $\mathbb{R}^+$ .

**Première partie**

Soit  $n$  un entier positif ou nul et  $k$  un entier tel que  $0 \leq k \leq a_n$ . On suppose dans cette partie que la loi conditionnelle de  $X_n$  sachant  $\{ F_n = 2k \}$  est une loi uniforme sur  $\{ 0, 1, 2, \dots, 2k - 1, 2k \}$ .

1) Etablir, pour tout entier  $j$  tel que  $0 \leq j \leq 2k$ , l'égalité  $P(F_{n+1} = 2j \cap F_n = 2k) = \frac{1}{2k+1} P(F_n = 2k)$ .

(On pourra utiliser le système complet d'événements constitué par les deux résultats possibles du lancer  $n + 1$ .)

2) En déduire, pour tout entier  $j$  tel que  $0 \leq j \leq a_{n+1}$ , une expression sommatoire de  $P(F_{n+1} = 2j)$ .

3) Montrer que pour  $x$  appartenant à  $[0, 1[$ , 
$$G_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{a_n} \frac{x^{2k+1} - 1}{(2k+1) \cdot (x-1)} P(F_n = 2k)$$
.

4) En déduire, pour  $x$  appartenant à  $\mathbb{R}$ , l'égalité :  $(1-x)G_{n+1}(x) = \int_x^1 G_n(t^2) dt$  (1)

5) Prouver, en dérivant deux fois cette égalité, que pour tout  $n \geq 0$ , on a  $E(F_n) = a$ .

**Deuxième partie (Les deux sous parties A et B sont indépendantes)**

On suppose maintenant que la *loi conditionnelle* de la variable  $X_n$  sachant  $\{F_n = 2k\}$  est une loi binômiale de paramètres  $2k$  et  $r$ ,  $r$  étant un réel de  $]0, 1[$ .

**A) Simulation Informatique de l'expérience**

On considère le programme suivant :

```
program simulation ;
var a , n , i , X , F : integer ;
    r , p : real ;
function mise( m : integer , s : real ) : integer ;
.....
end ;
begin
randomize ; readln ( n ) ; readln( p ) ; readln( r ) ; readln( a ) ; F := a ;
for i := 1 to n do
    begin X := mise( F , r ) ;
        if random < p then .....
        .....
    end ;
end.
```

La fonction " random " est une fonction sans argument. A son appel, l'ordinateur génère un nombre aléatoire compris entre 0 et 1, nombre qui suit une loi uniforme sur  $[0, 1]$ . L'instruction " randomize " est utilisée pour obliger l'ordinateur à générer un nouveau nombre à chaque appel de la fonction.

La fonction " mise " est une fonction qui simule une loi binômiale de paramètres  $m$  et  $s$ . Elle doit donc prendre, à chaque appel, une valeur aléatoire entière comprise au sens large entre 0 et  $m$ , la probabilité qu'elle prenne une valeur donnée étant celle fournie par la loi binômiale de paramètres  $m$  et  $s$ .

1) Rédiger les lignes manquantes ( déclarations et instructions ) dans la définition de la fonction " mise ".

2) Rédiger les instructions manquantes du corps principal du programme de telle sorte que celui-ci calcule et affiche les fortunes successives  $F_1, \dots, F_n$  du joueur, les paramètres  $a, r, p, n$  étant fournis par l'utilisateur.

**B) Etude théorique**

Dans toute cette partie, on posera  $A = pr^2 + (1-p)(1-r)^2$  et  $B = 2[pr + (1-p)(1-r)]$ .

- 1) En procédant comme dans les trois premières questions de la première partie, montrer que pour tout réel  $x$  et tout entier  $n \geq 0$ , on a :  $G_{n+1}(x) = p G_n[(x+1-r)^2] + (1-p) G_n[(x-r)^2]$ . (2)

Dans les questions 2 et 3, on suppose que  $p = 1/2$ .

On considère le trinôme  $Q$ , défini par  $Q(x) = Ax^2 + 2r(1-r)x + A$ , et la suite  $(u_n)$  définie par la condition initiale  $u_0 = 0$  et, pour tout entier  $n \geq 0$ , par la relation de récurrence  $u_{n+1} = Q(u_n)$ .

- 2) a) Montrer, pour tout réel  $x$ , l'égalité :  $Q(x) = x + A(x-1)^2$ .  
b) Montrer que l'intervalle  $[0, 1]$  est stable par  $Q$ .  
c) Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante et convergente. Donner la valeur de sa limite.
- 3) a) Montrer, en utilisant (2) et la convexité de  $G_n$  que pour tout entier  $n \geq 0$  et tout réel  $x \geq 0$ , on a l'inégalité :  $G_{n+1}(x) \geq G_n[Q(x)]$ .  
b) Etablir, pour tout entier  $n \geq 0$ , l'inégalité :  $G_{n+1}(0) \geq G_1(u_n)$ . Conclure.

On revient au cas général  $p$  quelconque.

- 4) a) Montrer à l'aide de (2), que la suite  $(E(F_n))_n$  est géométrique de raison  $B$ .  
b) En posant  $p' = 1/2 - p$  et  $r' = 1/2 - r$ , étudier la limite de cette suite suivant les valeurs de  $p$  et  $r$ .  
c) Montrer que si la suite  $(E(F_n))_n$  tend vers 0, alors la suite  $(P(F_n = 0))_n$  tend vers 1.
- 5) a) Pour tout entier  $n \geq 0$ , établir à l'aide de (2) une relation entre  $G_{n+1}''(1)$ ,  $G_n''(1)$  et  $G_n'(1)$ .  
b) Montrer que la suite de terme général  $v_n = G_n''(1) / B^n$  est arithmético-géométrique.  
c) En déduire, pour tout entier  $n \geq 0$ , une expression explicite de  $G_n''(1)$  en fonction de  $a$ ,  $n$ ,  $A$ ,  $B$ .

On suppose, dans cette dernière question, que  $p = r = 1/3$ .

- 6) a) Calculer les trois réels  $A$ ,  $B$ ,  $B^2$  et en déduire un équivalent de  $V(F_n)$  quand  $n$  tend vers l'infini.  
b) Montrer, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev, que la probabilité  $P(F_n < 2^{n/4} a)$  tend vers 1 quand  $n$  tend vers l'infini. (On utilisera les inégalités :  $2^{1/4} > 10/9$  et  $3\sqrt{2} > 4$ .)

**Fin de l'épreuve**