

ASSEMBLÉE DES CHAMBRES FRANÇAISES DE COMMERCE ET
D'INDUSTRIE

ÉPREUVES ESC

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PRÉPARATOIRES

MATHÉMATIQUES

OPTION ÉCONOMIQUE

MERCREDI 16 MAI 2001, de 8 h à 12 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document ;

”L’usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve”.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'épreuve est composée de trois exercices indépendants.

EXERCICE 1

On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = 2xe^x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[0, 1]$ sur un ensemble que l'on déterminera.
On note f^{-1} la bijection réciproque de f . Donner les tableaux de variations de f et de f^{-1} .
2. Vérifier qu'il existe dans $[0, 1]$ un et un seul réel noté α tel que $\alpha e^\alpha = 1$.
Montrer que $\alpha \neq 0$.

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \end{cases}$$

3. Montrer que, pour tout entier naturel n , u_n existe et $u_n \in]0, 1]$.
4. (a) Montrer que pour tout réel x de $[0, 1]$, $f(x) - x \geq 0$.
Vérifier que l'égalité ne se produit que pour $x = 0$.
(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
(c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et qu'elle a pour limite 0.
5. On se propose de préciser ce résultat en déterminant un équivalent de u_n .

On pose, pour tout entier naturel n : $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

- (a) Montrer que, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n e^{-u_{n+1}}$.
- (b) En déduire par récurrence que pour tout entier naturel n : $u_n = \frac{e^{-S_n}}{2^n}$.
- (c) Montrer que $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$, et en déduire que la série de terme général u_n est convergente. On note L sa somme. Montrer que $\alpha \leq L \leq 2$.
- (d) Montrer finalement que $u_n \underset{\rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-L}}{2^n}$.

EXERCICE 2

On donne les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -14 \\ 6 & 6 & -16 \\ 5 & 5 & -14 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -16 \\ 0 & 4 & -8 \\ 4 & 4 & -12 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi que les matrices colonne :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que V_1, V_2 et V_3 sont des vecteurs propres de A .

A quelles valeurs propres sont-ils associés ?

2. (a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .

(b) Justifier la relation $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

On note D cette matrice diagonale.

(c) Calculer la matrice $\Delta = P^{-1}BP$ et vérifier qu'elle est diagonale.

3. On se propose de calculer les matrices colonne X_n définies par les relations :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, X_{n+2} = AX_{n+1} + BX_n.$$

A cet effet, on définit pour tout $n \in \mathbb{N} : Y_n = P^{-1}X_n$ et on pose également $Y_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que $Y_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $Y_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(b) Montrer que pour tout entier naturel $n, Y_{n+2} = DY_{n+1} + \Delta Y_n$.

(c) Montrer alors que pour tout entier naturel $n :$

$$\begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} \\ v_{n+2} = 4v_n \\ w_{n+2} = -4w_{n+1} - 4w_n \end{cases}$$

En déduire les expressions explicites de u_n, v_n et w_n en fonction de n .

(d) Donner finalement la matrice X_n en fonction de n .

EXERCICE 3

1. On pose pour tout entier naturel n non nul l'intégrale : $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^n} dt$.
- (a) Calculer pour $A \geq 1$ l'intégrale $\int_1^A \frac{\ln t}{t} dt$ et en déduire que I_1 est divergente.
- (b) Montrer grâce à une intégration par parties que pour tout entier $n \geq 2$, l'intégrale I_n converge et vaut $\frac{1}{(n-1)^2}$.
- (c) Etudier les variations de la fonction f définie sur $[2, +\infty[$ par $f(t) = \frac{\ln t}{t^2}$ et donner sa limite en $+\infty$. (On donne $\sqrt{e} \approx 1,65$)
- (d) En déduire grâce à I_2 que $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\ln k}{k^2}$ converge (On ne cherchera pas à calculer cette série).
2. On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par : $\begin{cases} g(t) = 0 & \text{si } t < 1 \\ g(t) = \frac{4 \ln t}{t^3} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$
- (a) Montrer que g est continue sur \mathbb{R} et constitue une densité de probabilité.
(On utilisera les résultats de la question 1.(b).)
On nomme dans toute la suite X une variable aléatoire admettant la densité g .
- (b) Etudier l'existence et la valeur éventuelles de l'espérance $E(X)$.
- (c) La variable X admet-elle une variance ?
3. Etude d'une variable discrète définie à partir de X .
- (a) On considère la fonction G définie sur \mathbb{R} par $\begin{cases} G(t) = 0 & \text{si } t < 1 \\ G(t) = 1 - \frac{2 \ln t}{t^2} - \frac{1}{t^2} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$
Montrer que G est dérivable sur \mathbb{R} puis justifier que G est la fonction de répartition de la variable aléatoire X .
On note Z la variable aléatoire discrète définie par :
 $Z(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Z(X) = [X]$, partie entière de X .
On rappelle que si $x \in \mathbb{R}^+$ et $k \in \mathbb{N}$, $[x] = k \Leftrightarrow k \leq x < k + 1$.
- (b) Montrer que pour tout entier naturel k , $P(Z = k) = G(k + 1) - G(k)$.
- (c) En déduire par récurrence sur l'entier naturel n que :
- $$\sum_{k=0}^n kP(Z = k) = -(n + 1)[1 - G(n + 1)] + \sum_{k=0}^n (1 - G(k + 1))$$
- (d) Montrer que $(1 - G(k))$ est équivalent en $+\infty$ à $\frac{2 \ln k}{k^2}$.
- (e) Déduire de l'ensemble des résultats obtenus que Z admet une espérance.