



CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

**ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P. - E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON**

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION LETTRES & SCIENCES-HUMAINES

MATHEMATIQUES

PROGRAMME ENS (B/L)

Mercredi 9 Mai 2001, de 8h. à 12h.

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

On dispose de n jetons numérotés de 1 à n , n étant un entier strictement supérieur à 1. On tire, au hasard et sans remise, les jetons un à un. La suite $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ des numéros tirés est aussi appelée permutation de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.

Étant donné deux entiers k et p vérifiant $1 \leq k \leq p \leq n$, la suite $(a_k, \dots, a_p)$ — se réduisant à (a_k) dans le cas où k est égal à p — est appelée sous-suite de $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ et son nombre d'éléments est appelé longueur de cette sous-suite.

On admettra que cette expérience aléatoire peut être modélisée par la donnée de l'univers Ω , ensemble des permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$, muni de la tribu de ses parties $\mathcal{P}(\Omega)$ et de la probabilité uniforme $\mathbf{P}$, ce qui signifie que, pour toute permutation ω de $\{1, 2, \dots, n\}$, on a : $\mathbf{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{n!}$.

Si X est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$, on note $E(X)$ son espérance et $V(X)$ sa variance.

Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$, on note $\text{Cov}(X, Y)$ leur covariance.

Préliminaire

Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{1, 2, \dots, m\}$ où m est un entier strictement supérieur à 1.

Montrer l'égalité : $E(X) = \sum_{k=1}^m P([X \geq k])$.

Partie 1 : Première sous-suite croissante

Étant donné une permutation $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ de $\{1, 2, \dots, n\}$, la première sous-suite croissante est définie de la façon suivante : dans le cas $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, la première sous-suite croissante est $(a_1, a_2, \dots, a_n)$; dans le cas contraire, k étant le plus petit entier de $\{1, \dots, n-1\}$ vérifiant $a_k > a_{k+1}$, la première sous-suite croissante est $(a_1, \dots, a_k)$.

Soit L la variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ qui, à toute permutation ω , associe la longueur de sa première sous-suite croissante.

Par exemple, si $n = 9$ et $\omega = (2, 3, 5, 4, 9, 6, 7, 8, 1)$, comme $2 < 3 < 5$ et $5 > 4$, on a : $L(\omega) = 3$.

- 1) a) Quelles sont la plus petite et la plus grande des valeurs prises par L ? Que vaut $P([L = n])$?
 b) Montrer que, pour tout entier k de $\{1, 2, \dots, n\}$, on a : $P([L \geq k]) = \frac{1}{k!}$. En déduire la loi de L .
- 2) Donner la valeur de $E(L)$ sous forme d'une somme et déterminer la limite de $E(L)$ quand n tend vers l'infini.

Partie 2 : Deuxième sous-suite croissante

Étant donné une permutation $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ de $\{1, 2, \dots, n\}$ et sa première sous-suite croissante $(a_1, \dots, a_k)$; si celle-ci se termine par a_n (i.e. si $k = n$), on dit que la deuxième sous-suite croissante n'existe pas ; dans le cas contraire, la première sous-suite croissante de $(a_{k+1}, \dots, a_n)$ est appelée deuxième sous-suite croissante de $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Soit L' la variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ qui, à toute permutation ω , associe 0 s'il n'existe pas de deuxième sous-suite croissante, et la longueur de la deuxième sous-suite croissante, dans le cas contraire.

Par exemple, si $n = 9$ et $\omega = (2, 3, 5, 4, 9, 6, 7, 8, 1)$, la deuxième sous-suite croissante est $(4, 9)$ et l'on a : $L'(\omega) = 2$.

- 1) Quelles sont la plus petite et la plus grande des valeurs prises par L' ? Que vaut $P([L' = 0])$?
- 2) On suppose, dans cette question seulement, que n est égal à 3.
 a) Montrer que la loi du couple (L, L') est donnée par le tableau suivant :

L			
L'	1	2	3
0	0	0	1/6
1	1/6	1/3	0
2	1/3	0	0

- b) Donner la loi de L' et calculer son espérance.
- c) Calculer la covariance de L et de L' . Pouvait-on prévoir le signe de cette covariance ?
- 3) On suppose à nouveau que n est un entier quelconque strictement supérieur à 1.
 a) Dénombrer les parties de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ distinctes de $\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \dots, \{1, 2, \dots, n-1\}$.
 b) En déduire $P([L + L' = n])$.
 c) Montrer de même que, pour tout entier k de $\{1, 2, \dots, n\}$, on a : $P([L + L' \geq k]) = \frac{2^k - k}{k!}$.
 d) Donner la valeur de $E(L + L')$ sous forme d'une somme.
 e) En déduire $E(L')$ et sa limite quand n tend vers l'infini.

Partie 3 : Nombre de sous-suites croissantes

Étant donné une permutation $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ de $\{1, 2, \dots, n\}$, si sa deuxième sous-suite croissante existe et ne se termine pas par a_n , on définit la troisième sous-suite croissante à l'instar de la deuxième, etc., jusqu'à ce que l'on ait défini une sous-suite croissante se terminant par a_n .

Soit T la variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ qui, à toute permutation ω , associe le nombre de ses sous-suites croissantes.

Par exemple, si $n = 9$ et $\omega = (2, 3, 5, 4, 9, 6, 7, 8, 1)$, comme les sous-suites croissantes sont $(2, 3, 5)$, $(4, 9)$, $(6, 7, 8)$ et (1) , on a : $T(\omega) = 4$.

- 1) a) Donner la loi de T dans le cas où n vaut 2. Calculer son espérance et sa variance.
b) Donner la loi de T dans le cas où n vaut 3. Calculer son espérance et sa variance.
- 2) On suppose désormais l'entier n supérieur ou égal à 4.
 - a) Calculer $\mathbf{P}([T = 1])$ et $\mathbf{P}([T = n])$.
 - b) Comparer les événements $[L + L' = n]$ et $[T \leq 2]$. En déduire la valeur de $\mathbf{P}([T = 2])$.
 - c) Donner la loi de T dans le cas où n vaut 4. Calculer son espérance et sa variance.
- 3) Pour tout entier i de $\{1, 2, \dots, n-1\}$, soit A_i l'événement égal à l'ensemble des permutations $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ vérifiant $a_i > a_{i+1}$, et soit X_i la variable aléatoire qui, à toute permutation ω , associe 1 si $\omega \in A_i$ et 0 sinon.
 - a) Montrer que X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Donner son espérance et sa variance.
 - b) Donner une expression de T en fonction de X_i . En déduire l'égalité : $E(T) = \frac{n+1}{2}$.
 - c) Montrer que l'on a : $\forall i \in \{1, \dots, n-2\}, \mathbf{P}(A_i \cap A_{i+1}) = \frac{1}{6}$. En déduire la valeur de $\text{Cov}(X_i, X_{i+1})$.
 - d) Montrer que, pour tout couple (i, j) d'entiers vérifiant $1 \leq i < i+2 \leq j \leq n-1$, les événements A_i et A_j sont indépendants.
En déduire l'égalité : $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$.
 - e) Établir enfin l'égalité : $V(T) = \frac{n+1}{12}$.
- 4) On suppose, dans cette question, que n est égal à 5. On considère 1000 variables aléatoires $T_1, \dots, T_{1000}$, mutuellement indépendantes, de même loi que la variable T et on note S la variable aléatoire égale à $\frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} T_i$.
On note ϕ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et on donne la valeur approchée suivante : $\phi(\sqrt{5}) \simeq 0,987$.
Calculer une valeur approchée de la probabilité $\mathbf{P}([2,95 < S < 3,05])$.
- 5) On suppose à nouveau que n est un entier quelconque strictement supérieur à 1.
 - a) Si $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ est une permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$ et k le nombre de ses sous-suites croissantes, quel est le nombre de sous-suites croissantes de la permutation $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)$?
 - b) En déduire, pour tout entier k vérifiant $1 \leq k \leq n$, l'égalité : $\mathbf{P}([T = k]) = \mathbf{P}([T = n+1-k])$.
Retrouver ainsi la valeur de $E(T)$.