

CONCOURS D'ADMISSION 2002

option lettres et sciences humaines
ULM BL

MATHÉMATIQUES

jeudi 23 mai 2002 de 14 h 00 à 17 h 00

durée : 3 heures

Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

Aucun document n'est autorisé.

La composition dans une autre option que celle pour laquelle le candidat s'est inscrit est interdite.

L'énoncé comporte 4 pages.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

1. PROBLEME.

On se propose ici d'étudier la nature de la suite réelle, définie par son premier terme $u_0 \neq 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \ln \frac{\exp u_n - 1}{u_n}$$

À cet effet, on introduit la fonction numérique f de la variable réelle x par :

$$\begin{cases} f(x) = \ln \frac{\exp x - 1}{x} & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$\exp$ désigne ici la fonction exponentielle de base e .

1.1. Etude de la fonction f .

1. Prouver que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Donner un développement limité, au voisinage de 0, à l'ordre 1, de $f(x)$.
3. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Prouver que f est dérivable en 0 et donner la valeur du nombre dérivé de f en ce point.
5. Déterminer la fonction h continue sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\text{Pour } x \neq 0, \quad f'(x) = \frac{h(x) \exp x}{x(\exp x - 1)}$$

6. Dresser le tableau de variations de h et déterminer son signe.
7. Dresser le tableau de variations de f et en déduire son signe.

1.2. Etude de la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ garde un signe constant, celui de u_0 .
2. Prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = f(-u_n)$$

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone.
4. Justifier la convergence de la suite vers un réel l à préciser.
5. Montrer enfin que le rapport u_{n+1}/u_n admet une limite quand n tend vers $+\infty$.

2. PROBLEME.

E_n désigne l'espace des polynômes à coefficients réels, dont le degré est inférieur ou égal à l'entier naturel n .

$M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

$GL_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $M_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles.

On considère l'application f_n qui, à tout élément P de E_n , associe le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = (X - 1)P'(X) + P(X)$$

2.1. Diagonalisation de f_n .

1. Montrer que f_n est un endomorphisme de E_n .
2. Déterminer l'image par f_n des vecteurs de la base canonique $\mathcal{B}_n = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ de E_n . Ecrire alors la matrice A_n de f_n relativement à $\mathcal{B}_n$.
3. En déduire les valeurs propres de f_n . L'endomorphisme f_n est-il diagonalisable ? Est-ce un automorphisme de E_n ?

2.2. Recherche des vecteurs propres de f_n .

Soit P un vecteur propre pour f_n , c'est-à-dire un élément non nul de E_n tel qu'il existe un réel λ satisfaisant à la relation :

$$f_n(P) = \lambda P$$

1. Soit $\lambda = 1$. Montrer que P est constant.
En déduire les vecteurs propres associés à la valeur propre 1.
2. On suppose maintenant que $\lambda \neq 1$.
 - a. Montrer que 1 est racine de P .
 - b. Soit k l'entier non nul égal à l'ordre de multiplicité de la racine 1. Il existe donc un polynôme R tel que :

$$P(X) = (X - 1)^k R(X) \quad \text{avec} \quad R(1) \neq 0$$

Montrer que :

$$k = \lambda - 1$$

et que R est constant.

- c. En déduire les vecteurs propres associés à la valeur propre λ .

2.3. Cas particulier $n = 2$.

Dans cette question seulement on suppose $n = 2$.

1. Déterminer une matrice D diagonale et une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$A_2 = PDP^{-1}$$

2. En déduire que :

$$A_2^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$$

2.4. Etude d'une chaîne de Markov.

On dispose de trois urnes U_1, U_2, U_3 . Pour $k \in \{1, 2, 3\}$, l'urne U_k contient k boules numérotées de 1 à k .

On s'intéresse à une suite d'épreuves définies de la manière suivante :

- Les tirages se font avec remise des boules.
- La première épreuve consiste à tirer au hasard une boule dans l'urne U_3 .
- Si j est le numéro de la boule tirée à la $k^{\text{ème}}$ épreuve, $k \geq 1$, on tire une boule au hasard dans l'urne U_j à la $(k+1)^{\text{ème}}$ épreuve.

On considère alors la variable aléatoire réelle X_k égale au numéro de la boule obtenue à la $k^{\text{ème}}$ épreuve.

Compte tenu des hypothèses qui précèdent, on convient de poser $X_0 = 3$.

On note alors M_k la matrice unicolonne définie par :

$$M_k = \begin{pmatrix} p[X_k = 1] \\ p[X_k = 2] \\ p[X_k = 3] \end{pmatrix}$$

où $p[X_k = j]$ est la probabilité de tirer la boule numéro j à la $k^{\text{ème}}$ épreuve.

1. Par utilisation de la formule des probabilités totales, prouver que :

$$M_{k+1} = A_2^{-1}M_k$$

2. Les matrices D et P étant celles de la question 2.3.1, en déduire, par récurrence sur l'entier k , que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad M_k = P(D^{-1})^k P^{-1}M_0$$

3. Expliciter alors M_k , puis les probabilités $p[X_k = 1], p[X_k = 2], p[X_k = 3]$ en fonction de k . Déterminer les limites de ces probabilités lorsque k tend vers $+\infty$.
4. Calculer l'espérance $E(X_k)$ de X_k , puis sa limite lorsque k tend vers $+\infty$.