ecricome

banque d'épreuves communes

aux concours des Ecoles
escbordeaux / escmarseille / icnnancy / escreims / escrouen / esctoulouse

CONCOURS D'ADMISSION 2002

option technologique

MATHÉMATIQUES

Mercredi 22 mai 2002 de 8 h 00 à 12 h 00

durée : 4 heures

Aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 5 pages.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

Tournez la page S.V.P.

1. EXERCICE.

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$$

et on note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.
On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = 1/2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1.1. Etude de la fonction f.

1. Etudier le signe du trinôme $P(x)$ défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = x^2 - x + 1$$

   En déduire que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Etudier f, préciser les limites aux bornes, puis dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$.

3. Comportement de (C) au voisinage de $+\infty$.

   a. Montrer que, pour tout réel x strictement positif :

$$f(x) - x = \frac{\dfrac{1}{x} - 1}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}} + 1}$$

   b. En déduire la valeur de :

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x)$$

   ainsi qu'une équation de (Δ), asymptote à (C) en $+\infty$.

4. Résoudre l'équation $f(x) = x$.

5. Majoration de la valeur absolue de f' sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$

   a. Exprimer $f'(x)$ en fonction de x et de $f(x)$.

   b. Montrer que :

$$\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \quad f(x) \geqslant \sqrt{\frac{3}{4}}$$

   c. En déduire que :

$$\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$$

1.2. Convergence de la suite (u_n).

1. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

2. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant u_{n+1}$$

3.

   a. Justifier que la suite (u_n) est convergente, et préciser sa limite.

   b. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - 1| \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n |u_0 - 1|$$

2. EXERCICE.

On considère les matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}, \; Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2.1. Calcul des puissances de M.

1. Déterminer l'expression de D^n, pour tout entier naturel n non nul.
2. Calculer PQ. En déduire que P est inversible, et exprimer P^{-1} sous la forme d'un tableau de nombres.
3. Calculer le produit $P^{-1}MP$.
4. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad M^n = PD^nP^{-1}$$

5. Ecrire M^n sous la forme d'un tableau de nombres, où n est un entier naturel non nul.

2.2. Suites définies par une relation de récurrence.

On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ v_0 = 0 \\ w_0 = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2w_n}{4} \\ \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{2} \\ \\ w_{n+1} = \dfrac{u_n + 2w_n}{4} \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n, on note :

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

1. Exprimer X_{n+1} en fonction de M et de X_n.

2.

   a. En déduire l'expression de X_n en fonction de M^n et de X_0 pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

   b. A l'aide des résultats obtenus en 2.1.5, déterminer alors l'expression de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

   c. Déterminer la limite des suites (u_n), (v_n), (w_n).

3. EXERCICE.

Un commerçant dispose d'un stock de plantes. Chacune des plantes fleurit une fois par an.
Pour chaque plante, la première année, la probabilité de donner une fleur rose vaut $3/4$, la probabilité de donner une fleur blanche vaut $1/4$.
Puis les années suivantes, pour tout entier naturel n non nul :
- si l'année n la plante a donné une fleur rose, alors l'année $n+1$ elle donnera une fleur rose.
- si l'année n la plante a donné une fleur blanche, alors elle donnera l'année $n+1$ de façon équiprobable une fleur rose ou une fleur blanche.

3.1. Etude d'une suite.

n désigne un entier naturel non nul. Pour une plante donnée, on note p_n la probabilité de l'événement R_n "la plante donne une fleur rose la $n^{ème}$ année".

1. A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite arithmético-géométrique qui vérifie :

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}\, p_n + \frac{1}{2}$$

2. En déduire l'expression de p_n en fonction de n et de p_1.

3. Que vaut p_1 ? En déduire p_n, ainsi que la valeur de $\lim_{n\to+\infty} p_n$.

4.
   a. Quelle est la probabilité que la plante ne donne que des fleurs roses pendant les n premières années ?

   b. Quelle est la probabilité que la plante ne donne que des fleurs blanches pendant les n premières années ?

3.2. Etude d'une variable aléatoire.

Un client vient acheter une commande de 10000 plantes, choisies au hasard dans le stock. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de plantes, parmi les 10000 achetées, qui donnent la première année une fleur rose.

1. Reconnaître la loi de X, donner la valeur de $E(X)$ et de $V(X)$. On note σ l'écart-type de X. Vérifier que l'on a : $\sigma = 25\sqrt{3}$.

2. Par quelle loi normale peut-on approcher la loi de X ?

3. Sans tenir compte de la correction de continuité, utiliser cette approximation pour donner une valeur approchée de $P(7450 \leqslant X \leqslant 7550)$.
   On donne $\Phi(\frac{2}{\sqrt{3}}) \simeq 0.87$, où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.