

ASSEMBLEE DES CHAMBRES FRANCAISES DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE

EPREUVES ESC

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

***MA THEMATIQUES***  
OPTION TECHNOLOGIQUE

***MARDI 21 MAI 2002, de 8 h à 12 h***

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document;*

**"L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique**

**est interdit pendant cette épreuve".**

*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

L'épreuve est composée de trois exercices indépendants.

N.B. Il est demandé au candidat d'indiquer, **impérativement**, son numéro d'inscription sur les copies.

## Exercice I

On donne les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Partie A

- 1) Calculer  $J^2$ ,  $J^3$ ; en déduire par récurrence  $J^k$  pour tout entier  $k$  de  $\mathbb{Z}^*$ .
- 2) Déterminer deux nombres réels  $a$  et  $b$  tels que  $A = aI + bJ$ .
- 3) Montrer par récurrence sur  $n$  que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{Z}^*$ , on a l'égalité  $A^n = 2^n I + \left(\frac{4^n - 2^n}{2}\right)J$ .
- 4) En déduire, pour tout  $n$  de  $\mathbb{Z}^*$ ,  $A^n$  sous forme de tableau de nombres.

### Partie B

- 1) La formule obtenue à la question A)3) est-elle encore valable pour  $n = 0$  ? (on rappelle que  $A^0 = I$ )
- 2) Montrer que la matrice  $A$  est inversible et calculer son inverse par la méthode du pivot de Gauss. (les calculs figureront sur la copie).
- 3) La formule obtenue à la question A)3) est-elle encore valable pour  $n = -1$  ? (justifier)

## Exercice II

Soit la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = x + 1 + 2 \frac{\ln x}{x}$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal, l'unité de longueur étant 2 cm.

**Partie A** : étude de  $f$  et tracé de (C).

- 1) Etudier les branches infinies de (C). On montrera que la courbe admet pour asymptote oblique en  $+\infty$  la droite (D) d'équation  $y = x + 1$ .
- 2) On pose pour tout réel  $x$  strictement positif :  $u(x) = x^2 + 2 - 2 \ln x$ 
  - a) Etudier le sens de variation de  $u$  (on ne cherchera pas les limites de  $u$ ). En déduire le signe de  $u(x)$  sur  $]0; +\infty[$ .
  - b) Calculer  $f'(x)$  et montrer que  $f'(x)$  a le même signe que  $u(x)$ .
  - c) Utiliser le résultat précédent pour déterminer le sens de variation de  $f$ , et dresser le tableau de variation de  $f$ .

- 3) Construction de la courbe (C) :
- Etudier la position de (C) par rapport à la droite (D) d'équation  $y = x + 1$ .
  - Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.
  - Tracer (D), (T) et (C) (on placera les points d'abscisse  $\frac{1}{2}$ , 1, e, 4).

On donne :  $f(e) \approx 4,5$  ;  $f(1/2) \approx -1,3$  ;  $f(4) \approx 5,7$ .

**Partie B** : approche de la solution de l'équation  $f(x) = x$

**On admet que l'équation  $f(x) = x$  a une solution unique dans  $]0; 1]$ , notée  $\alpha$  et on se propose d'approcher  $\alpha$  par une suite récurrente.**

- Construire  $\alpha$  sur le graphique de la question A3c).
- Soient  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n) = e^{-\frac{1}{2}u_n} \end{cases}$$

- Montrer que l'équation  $f(x) = x$  équivaut à l'équation  $x = g(x)$ . Que vaut donc  $g(\alpha)$ ?
- Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $0 \leq u_n \leq 1$ .
- Calculer  $g'(x)$  et montrer que pour tout  $x$  de  $[0; 1]$ ,  $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$ .
- En déduire à l'aide de l'inégalité des accroissements finis que pour tout entier  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

(on énoncera clairement le théorème utilisé et on justifiera que l'on est dans les conditions d'application).

- Montrer alors que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ .
- Déterminer la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .
  - Déduire de la question B 3) une valeur entière  $n_0$  à partir de laquelle le nombre  $u_n$  est une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près ?

Valeurs numériques : on pourra utiliser la valeur :  $\frac{\ln 10}{\ln 2} \approx 3,32$ .

### Exercice III

Une urne contient 2 boules rouges et une boule verte indiscernables au toucher.

#### Partie A

On effectue dans cette urne trois tirages successifs, avec remise de la boule tirée après chacun des tirages.

On note pour  $i = 1, 2$  ou  $3$  :  $R_i$  : "La  $i$ -ème boule tirée est rouge"

et  $V_i$  : "La  $i$ -ème boule tirée est verte" (donc  $V_i = \overline{R_i}$ )

On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de fois où le tirage a donné une boule rouge.

- 1)
  - a) Reconnaître la loi de  $X$  en justifiant votre réponse.  
Préciser les valeurs prises par  $X$  et les probabilités correspondantes.
  - b) Donner l'espérance et la variance de  $X$ .
  
- 2) On désigne par  $Y$  la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule rouge (dans le cas où au moins une boule rouge est tirée sur les trois).  
On donne à  $Y$  la valeur 0 si les tirages ont donné 3 boules vertes.
  - a) Décrire en fonction des événements  $R_i$  et  $V_i$  les événements suivants :  
 $[(X=2) \cap (Y=1)]$ ,  $[(X=1) \cap (Y=3)]$  et  $[(X=3) \cap (Y=2)]$   
 et déterminer leur probabilité.
  - b) Donner, sous la forme d'un tableau à double entrée, la loi du couple  $(X;Y)$ .  
(On justifiera pour l'exemple deux valeurs non traitées dans la question précédente)
  - c) Expliquer comment retrouver la loi de  $X$  à partir du tableau.
  - d) Donner la loi marginale de  $Y$  et calculer l'espérance  $E(Y)$  de  $Y$ .
  - e) Les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ? Calculer la covariance de  $X$  et de  $Y$ .

### Partie B

On appelle "manche" l'expérience réalisée dans la partie A ( Tirer successivement avec remise trois boules dans l'urne)

. Pour jouer une manche, on mise 10 € ; chaque boule rouge extraite rapporte 5 €.

On appelle  $G$  la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros du joueur lors d'une manche (c'est-à-dire en tenant compte de la mise). Par exemple, si lors d'une manche on a extrait une seule boule rouge, alors  $G$  vaut  $-10€ + 5€ = -5€$ .

- 1)
  - a) Exprimer  $G$  en fonction de  $X$ .
  - b) En déduire le gain algébrique moyen d'un joueur. Le jeu est-il équitable ?
  
- 2)
  - a) Quelle est la probabilité d'obtenir un gain algébrique de 5 € au cours d'une manche ?
  - b) Un joueur décide de jouer jusqu'à obtenir lors d'une manche un gain algébrique de 5 €. Soit  $Z$  la variable aléatoire égale au nombre de manches jouées quand le joueur s'arrête. Quelle est la loi suivie par  $Z$  ? Préciser l'espérance et la variance de  $Z$ .

### Partie C

On effectue maintenant 450 tirages avec remise dans l'urne contenant deux boules rouges et une boule verte.

On note  $N$  la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues sur les 450 tirages.

- 1) Quelle est la loi suivie par  $N$  ? Que valent l'espérance et la variance de  $N$  ?
- 2) Montrer que  $N$  peut être approchée par une loi normale dont on précisera les paramètres.
- 3) A l'aide de cette approximation (et sans tenir compte de la correction de continuité), calculer la probabilité d'obtenir entre 290 et 310 boules rouges.

On donne  $\Phi(1) = 0,8413$  où  $\Phi$  désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.