



---

**ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES  
E.S.C.P. – E.A.P.  
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON**

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

---

OPTION TECHNOLOGIQUE

**MATHEMATIQUES II**

Lundi 13 Mai 2002, de 8 h. à 12 h.

---

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.  
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.  
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.  
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

---

**EXERCICE**

Toutes les variables aléatoires envisagées dans cet exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé dont la probabilité est notée  $P$ .

- A.** Soit  $X$  une variable aléatoire prenant chacune des valeurs  $-1$ ,  $0$  et  $1$  avec la probabilité  $\frac{1}{3}$  et  $Y$  la variable aléatoire définie par  $Y = X^2$ .
- 1) Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire  $X$ , ainsi que l'espérance de la variable aléatoire  $Y$ .
  - 2) Exprimer plus simplement en fonction de  $X$  et  $Y$  les variables aléatoires  $XY$  et  $Y^2$ .
  - 3) En déduire la variance de  $Y$  et la covariance de  $X$  et de  $Y$ .
  - 4) Tracer le tableau de la loi conjointe des variables aléatoires  $X$  et  $Y$ .
  - 5) En déduire que ces variables aléatoires ne sont pas indépendantes.
- B.** Dans cette sous-partie,  $p$ ,  $q$  et  $\lambda$  sont trois réels de l'intervalle  $]0, 1[$ ,  $X$  est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre  $p$ ,  $Y$  une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre  $q$  et  $\lambda$  est la probabilité de l'événement  $[X = 1] \cap [Y = 1]$ .
- 1) Préciser les espérances et les variances des variables aléatoires  $X$  et  $Y$ .
  - 2) Montrer que la variable aléatoire produit  $XY$  est une variable de Bernoulli et préciser son paramètre.
  - 3) Tracer le tableau de la loi conjointe des deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$ .
  - 4) Calculer en fonction de  $p$ ,  $q$ ,  $\lambda$ , la covariance de  $X$  et de  $Y$ .
  - 5) En utilisant le tableau de la loi conjointe, montrer que les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont indépendantes si et seulement si leur covariance est nulle. Ce résultat est-il valable pour tout couple  $(X, Y)$  de variables aléatoires ?

## PROBLÈME

On appelle *durée de vie* d'un composant électronique la durée de fonctionnement de ce composant jusqu'à sa première panne éventuelle.

On considère un composant électronique dont la durée de vie est modélisée par une variable aléatoire  $T$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ , définie sur un espace probabilisé dont on note  $\mathbf{P}$  la probabilité.

Toutes les variables aléatoires envisagées dans ce problème sont définies sur ce même espace probabilisé.

Le problème se compose de deux parties pouvant être traitées indépendamment.

### Partie 1 : Cas discret

On suppose dans cette partie que  $T$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$ .

#### A. Coefficient d'avarie

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $d_n$  la probabilité  $\mathbf{P}([T > n])$  et on suppose, dans cette sous-partie, que cette probabilité n'est pas nulle quelque soit l'entier naturel  $n$ .

Le composant est mis en service à l'instant 0. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on appelle *coefficient d'avarie* à l'instant  $n$  du composant, la probabilité qu'il tombe en panne à l'instant  $n$ , sachant qu'il fonctionne encore à l'instant  $n - 1$ , c'est-à-dire le nombre  $\pi_n$  défini par :

$$\pi_n = \mathbf{P}([T = n]/[T > n - 1])$$

- 1) Justifier l'égalité  $d_0 = 1$ .
- 2) Exprimer, pour tout entier naturel non nul  $n$ , la probabilité  $\mathbf{P}([T = n])$  en fonction de  $d_n$  et de  $d_{n-1}$ , en déduire l'égalité :  $\pi_n = \frac{d_{n-1} - d_n}{d_{n-1}}$ .
- 3) Dans cette question, on suppose que  $T$  suit la loi géométrique de paramètre  $\frac{1}{3}$ , c'est-à-dire que, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $\mathbf{P}([T = n])$  est donné par :  $\mathbf{P}([T = n]) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \frac{1}{3}$ .
  - a) Quelle est l'espérance de la variable aléatoire  $T$  ?
  - b) Calculer, pour tout entier naturel  $n$ ,  $d_n$  en fonction de  $n$ .
  - c) En déduire pour tout entier naturel  $n$  non nul, l'égalité :  $\pi_n = \frac{1}{3}$ .
- 4) On suppose dans cette question que l'on a :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \pi_n = \frac{1}{4}$ .
  - a) Établir, pour tout entier naturel non nul  $n$ , l'égalité :  $d_n = \frac{3}{4} d_{n-1}$ .
  - b) En déduire, pour tout entier naturel  $n$ , la valeur de  $d_n$  en fonction de  $n$ .
  - c) Montrer enfin que  $T$  suit une loi géométrique et préciser son paramètre.

#### B. Nombre moyen de pannes successives dans un cas particulier

On suppose, dans cette sous-partie, que la loi de  $T$  est donnée par :  $\mathbf{P}([T = 1]) = \frac{1}{3}$  et  $\mathbf{P}([T = 2]) = \frac{2}{3}$ .

Un premier composant est mis en service à l'instant 0 et, quand il tombe en panne, il est remplacé instantanément par un composant identique qui sera remplacé à son tour à l'instant de sa première panne dans les mêmes conditions, et ainsi de suite. On suppose alors que, pour tout entier strictement positif  $i$ , la durée de vie du  $i$ -ème composant est une variable aléatoire  $T_i$  de même loi que  $T$  et que ces variables aléatoires  $T_i$  sont indépendantes.

Pour tout entier strictement positif  $n$ , soit  $R_n$  la variable aléatoire de Bernoulli prenant la valeur 1 si une panne survient à l'instant  $n$  et la valeur 0 sinon. Son espérance est notée  $r_n$ .

- 1) a) Calculer l'espérance  $E(T)$  de la variable aléatoire  $T$ .
- b) Vérifier les égalités  $r_1 = \frac{1}{3}$  et  $r_2 = \frac{7}{9}$ .

- 2) Soit  $n$  un entier strictement positif. À l'aide de la formule des probabilités totales, écrire une relation donnant  $\mathbf{P}([R_{n+2} = 1])$  en fonction de  $\mathbf{P}([R_{n+1} = 1])$  et de  $\mathbf{P}([R_n = 1])$  et en déduire l'égalité :

$$r_{n+2} = \frac{1}{3} r_{n+1} + \frac{2}{3} r_n$$

- 3) Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on pose :  $s_n = \frac{8r_n - 3r_{n+1}}{5}$ .

Établir, pour tout entier naturel non nul  $n$ , les égalités :

$$\begin{cases} 3r_{n+1} = 8r_n - 5s_n \\ 3s_{n+1} = 10r_n - 7s_n \end{cases}$$

- 4) Soit  $M$ ,  $A$  et  $B$  les matrices définies par :  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 10 & -7 \end{pmatrix}$  et  $B = \frac{1}{3}A$ .

a) Montrer que la matrice  $M$  est inversible et calculer son inverse  $M^{-1}$ .

b) Établir l'égalité :  $M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ .

c) Calculer, pour tout entier naturel non nul  $n$ , la puissance  $n$ -ième de la matrice  $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$  et exprimer la matrice  $A^n$  en fonction de cette matrice et des matrices  $M$  et  $M^{-1}$ .

d) Pour tout entier naturel  $n$  non nul, donner explicitement la matrice  $A^n$  puis la matrice  $B^n$  en fonction de  $n$ .

- 5) a) Donner, pour tout entier naturel  $n$  non nul, une écriture matricielle des égalités obtenues à la question B.3 et en déduire, à l'aide des résultats de la question B.4, que la suite  $(r_n)_{n>0}$  vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, r_n = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

b) En déduire la limite de la suite  $(r_n)_{n>0}$ .

- 6) Soit  $n$  un entier strictement positif et  $U_n$  la variable aléatoire désignant le nombre de pannes (et donc de remplacements) survenues jusqu'à l'instant  $n$  inclus.

Exprimer la variable aléatoire  $U_n$  à l'aide des variables aléatoires  $R_i$ , calculer l'espérance  $\mathbf{E}(U_n)$

et montrer que l'on a :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E}(U_n)}{3n} = \frac{1}{5}$ .

## Partie 2 : Cas continu

Dans cette partie,  $T$  est une variable aléatoire de densité  $f$  nulle sur  $\mathbb{R}_-^*$ , continue sur  $\mathbb{R}_+$  et strictement positive sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Si  $F$  est la fonction de répartition de cette variable aléatoire, on appelle *loi de survie* du composant la fonction  $D$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, D(t) = 1 - F(t) = \mathbf{P}([T > t])$$

Pour tout réel  $t$  positif, on appelle *coefficient d'avarie* à l'instant  $t$  le nombre  $\pi(t)$  défini par :

$$\pi(t) = \frac{f(t)}{D(t)}$$

1. On suppose dans cette question que  $T$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\frac{2}{3}$ .

a) Déterminer alors la loi de survie du composant et donner l'allure de sa courbe représentative en précisant la tangente à l'origine.

b) Établir, pour tout réel  $t$  positif, l'égalité  $\pi(t) = \frac{3}{2}$ .

2. On suppose dans cette question que la densité  $f$  de la variable aléatoire  $T$  est définie par :

$$f(t) = \begin{cases} t e^{-\frac{t^2}{2}} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

a) Vérifier que la fonction  $f$  ainsi définie possède les propriétés d'une densité de probabilité.

- b) Préciser la densité continue d'une variable aléatoire normale centrée réduite et en déduire les égalités :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

- c) Calculer l'espérance de la variable aléatoire  $T$ .
- d) Montrer que la variable aléatoire  $T^2$  suit une loi exponentielle et préciser son paramètre.  
En déduire la variance de la variable aléatoire  $T$ .
- e) Déterminer la loi de survie du composant et donner l'allure de sa courbe représentative en précisant la tangente à l'origine.
- f) Calculer, pour tout réel  $t$  positif, le coefficient d'avarie  $\pi(t)$ .

3. On suppose dans cette question qu'il existe une constante  $\alpha$  strictement positive telle que l'on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \pi(t) = \alpha$$

- a) Pour tout réel  $t$  positif, on pose :  $g(t) = e^{\alpha t} D(t)$ .  
Montrer que la fonction  $g$  est constante sur  $\mathbb{R}_+$ .
- b) En déduire que  $T$  suit une loi exponentielle et préciser son paramètre.
-