INSEECom

Concours 2002 - 25 et 26 Avril

MATHEMATIQUES

Option Economique

Coefficient
Inseec Bordeaux : 5 - Inseec Paris : 3

DURÉE DE L'EPREUVE : 4 h

N.B. Vous trouverez du papier millimétré dans votre copie.

MATHEMATIQUES

Concours 2002 Option Economique

Exercice 1

Une roue de loterie se compose de secteurs identiques , numérotés de 1 à 12 .
Une personne fait tourner la roue devant un repère fixe .On suppose que chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant ce repère .

A chaque partie un joueur mise une certaine somme d'argent en choisissant un , deux ou trois numéros sur les 12 , il est gagnant si le secteur qui s'arrête devant le repère porte l'un des numéros choisis .

Un joueur , possédant un crédit illimité , effectue une suite de parties en adoptant la stratégie suivante :

* Il mise sur le chiffre 1 à la première partie .

** S'il perd à la $n^{ième}$ partie , $n \geq 1$, il mise uniquement sur les chiffres 1 et 2 à la partie suivante et s'il gagne à la $n^{ième}$ partie , il mise sur les chiffres 1 , 3 et 5 .

1) On note p_n la probabilité de l'événement A_n : " la joueur gagne la $n^{ième}$ partie ".

a) Calculer les probabilités conditionnelles : $p(A_{n+1}/A_n)$ et $p(A_{n+1}/\overline{A_n})$, en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \; p_{n+1} = \frac{1}{12} p_n + \frac{1}{6} .$$

b) En déduire l'expression de p_n en fonction de n et déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

2) Soit $k \in [\![1; n]\!]$, on note B_k l'événement : " le joueur gagne une seule fois au cours des n premières parties et ce gain a lieu à la $k^{ième}$ partie ".

a) A l'aide de la formule des probabilités composées , calculer $p(B_n)$.

b) Soit $k \in [\![1; n-1]\!]$, calculer $p(B_k)$.

c) En déduire la probabilité q_n pour que le joueur gagne une seule fois au cours des n premières parties .

Exercice 2

On considère la matrice carrée réelle d'ordre 3 : $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et on note φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est A , dans la base canonique $b = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

1) Déterminer le noyau et l'image de φ . En déduire que 0 est une valeur propre de φ .

2) a) Justifier que la matrice A est diagonalisable .

b) Vérifier que 4 et 6 sont deux valeurs propres de φ et déterminer les sous espaces propres associés .

c) On pose $u_1 = -e_1 + e_2 + 2e_3$, $u_2 = e_1 + e_2$ et $u_3 = e_1 - e_2 + e_3$, montrer que $b' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice A' de φ dans cette base .

3) Soient α , β , γ trois nombres reéls non nuls et P la matrice définie par $P = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \beta & -\gamma \\ 2\alpha & 0 & \gamma \end{pmatrix}$

a) Montrer en utilisant la question précédente que P est inversible .

b) On rappelle que pour toute matrice $A = (a_{ij})$, on appelle transposée de A , la matrice notée ${}^tA$, définie par ${}^tA = (a_{ji})$, c'est à dire obtenue en permutant les lignes et les colonnes de A , ainsi ${}^tP = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 2\alpha \\ \beta & \beta & 0 \\ \gamma & -\gamma & \gamma \end{pmatrix}$.

Calculer le produit $P.{}^tP$ et en déduire l'existence de valeurs de α , β et γ telles que ${}^tP = P^{-1}$.

On se placera dans cette situation dans la suite de l'exercice .

c) Justifier que $A = P.A'.{}^tP$.

4) Soient x , y et z trois reéls , on définit les matrices colonnes et lignes respectives : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et ${}^tX = (x, y, z)$ et on pose $g(x, y, z) = 4x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 4xz - 4yz$.

a) Montrer que : ${}^tX.A.X = g(x, y, z)$.

b) Montrer que la transposée de la matrice $({}^tP.X)$ est $({}^tX.P)$.

On pose ${}^tP.X = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ en déduire que : $g(x, y, z) = 4y'^2 + 6z'^2$.

5) On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = g(x, y, y^2)$.

a) Expliciter $f(x, y)$ et calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$.

b) Déterminer les extremums éventuels de f sur $\mathbb{R}^2$.

c) Montrer en utilisant la question 4) que $(0, 0)$ est un minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

d) Montrer que f présente un minimum local en $(-2, 2)$.

e) Des développements limités à l'ordre 2 en 0 de $h \longmapsto f(-\frac{1}{2} + h\ , 1 + h\ )$ et $h \longmapsto f(-\frac{1}{2} + h\ , 1 - h\ )$, en déduire que f ne présente pas un extremum local en $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

<u>Exercice 3</u>

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

c) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$ et justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

d) Achever l'étude des variations de f , dresser son tableau des variations , construire sa courbe représentative ainsi que la tangente à cette courbe à l'origine .

2) Etude d'une suite .

Soit u la suite définie par : $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in]0, 1[$.

b) Soit g la fonction définie sur $[0,1]$ par $g(x) = f(x) - x$, calculer $g''(x)$.

Montrer que g réalise une bijection de $[0,1]$ sur un ensemble que l'on déterminera .

(on admettra que $f'\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \simeq 0,82$) .

c) En déduire que la suite u est strictement décroissante et converge . Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

On se propose de démontrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

3) a) Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.

b) On définit pour tout entier naturel n non nul , la fonction polynôme P_n , par : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$P_1(x) = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad P_{n+1}(x) = x^3 P_n'(x) + (2 - 3nx^2)\, P_n(x)$.

Calculer $P_2(x)$ et vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f''(x) = \dfrac{P_2(x)}{x^6}\, f(x)$.

Montrer par récurrence sur n , $n \in \mathbb{N}^*$, que : $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}}\, f(x)$.

c) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(0) = 2^n$.

d) Montrer que : $\lim\limits_{x \to 0} f^{(n)}(x) = 0$.

e) Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$.

En déduire que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.