



INSEECom

Concours 2002 - 25 et 26 Avril

MATHEMATIQUES

Option Scientifique

Coefficient

Insec Bordeaux : 5 - Insec Paris : 4

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 h

N.B. Vous trouverez du papier millimétré dans votre copie.

Concours INSEEC année 2002
Epreuve de Mathématiques
option scientifique

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$. On se propose d'étudier l'existence et les propriétés des polynômes $P_n(X)$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{C} - \{0\}, P_n\left(t + \frac{1}{t}\right) = t^n + \frac{1}{t^n} \quad (\text{relation (1)}).$$

- 1) a) Montrer que si P_n existe alors P_n est unique.
- b) Justifier que $P_0(X) = 2$, que $P_1(X) = X$ et, en développant $\left(t + \frac{1}{t}\right)^2$, calculer $P_2(X)$ vérifiant la relation (1).
- 2) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n existe et $P_{n+2}(X) = X P_{n+1}(X) - P_n(X)$ (relation (2)).
- 3) Déterminer le degré de P_n , son terme de plus haut degré et sa parité.
- 4) a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer un complexe non nul t , $t \in \mathbb{C} - \{0\}$, tel que $t + \frac{1}{t} = 2 \cos(\theta)$
 puis calculer $P_n(2 \cos(\theta))$ en fonction de n et θ .
- b) En déduire les racines de P_n en fonction de n et une factorisation de P_n dans $\mathbb{R}[X]$.
- c) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $t^n + \frac{1}{t^n} = 0$ et retrouver ainsi le résultat précédent.
- 5) a) Calculer $P_5(X)$.
- b) En déduire une factorisation de $P_5(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$.
- c) En comparant cette factorisation et celle obtenue en 4)b) donner les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)$.

Exercice 2

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Le produit scalaire utilisé dans cet exercice est le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^3 .

- 1) Justifier que M est diagonalisable.
- 2) Calculer les valeurs propres de M et les sous espaces propres associés.
- 3) Déterminer une base orthogonale de \mathbb{R}^3 formée de vecteurs propres de M et en déduire une matrice P telle que ${}^t P M P$ soit diagonale (${}^t P$ désigne la transposée de P).
- 4) On pose $F = \text{Vect}((1, -2, 1))$ le sous espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par le vecteur $(1, -2, 1)$
 et $G = \text{Vect}((1, 0, -1), (1, 1, 1))$ le sous espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par les vecteurs $(1, 0, -1)$ et $(1, 1, 1)$.
 Soit p le projecteur sur F de direction G et q le projecteur sur G de direction F .
- a) Justifier que p et q sont des projecteurs orthogonaux et déterminer les endomorphismes $p \circ q$, $q \circ p$ et $p + q$.
- b) On appelle respectivement A et B les matrices de p et q dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
 Calculer A et B .

- 5) On pose f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est M .
- Montrer que $f = 5.p - q$.
 - En déduire f^n en fonction de n, p et q puis M^n en fonction de n pour tout entier naturel n .

Exercice 3

On suppose que l'attente d'un quelconque client aux guichets d'une administration suit une loi exponentielle de paramètre λ , que les différents temps d'attente des clients sont tous indépendants les uns des autres. Soit n un entier, $n \geq 3$. On mesure n temps d'attente choisis au hasard.

Notons X_i le temps d'attente du $i^{\text{ième}}$ client et $M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ la moyenne arithmétique de ces n temps d'attente.

Pour les besoins de certains calculs nous utiliserons la valeur approchée $\Phi(2) = 0,975$ où Φ désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée et réduite.

Partie A

- Justifier que M_n est un estimateur convergent et sans biais de $\frac{1}{\lambda}$.
- Justifier que pour n assez grand la loi de M_n peut-être approchée par une loi normale.
 - On suppose dans cette question que $\lambda \geq 4$. En utilisant cette approximation par une loi normale, évaluer n afin que l'on puisse affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5% que l'on connaît $\frac{1}{\lambda}$ au centième près.

Partie B

On pose $Y_n = \frac{1}{M_n}$ et on se propose dans cette partie de voir si Y_n est, ou non, un estimateur convergent de λ .

Appelons f_n et F_n la densité et la fonction de répartition de la loi Gamma $\left(\frac{1}{\lambda}, n\right)$.

(On rappelle que si $x > 0$, $f_n(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \lambda^n e^{-\lambda x} x^{n-1}$.)

- Rappeler la loi que suit la variable $\sum_{i=1}^n X_i$ puis calculer en fonction de f_n une densité de Y_n .
 - Montrer que, si $n > 1$, la variable aléatoire Y_n possède une espérance et que l'on a $E(Y_n) = \frac{n\lambda}{n-1}$.
 - Montrer que, si $n > 2$, la variable aléatoire Y_n possède une variance et que l'on a $V(Y_n) = \frac{n^2 \lambda^2}{(n-1)^2 (n-2)}$.
- Y_n est-il un estimateur convergent de λ ? Est-il avec ou sans biais?
 - Déterminer à l'aide de Y_n un estimateur convergent et sans biais de λ .

Partie C

Dans cette partie on suppose que l'on ne connaît pas la loi du temps d'attente des clients. Soit p la proportion des clients qui ont un temps d'attente supérieur à 4.

Déterminer un nombre n à partir duquel on peut affirmer que l'on peut connaître p à 0,04 près avec au moins 95% de chances ne pas se tromper.