



# **INSEECom**

**Concours 2002 - 25 et 26 Avril**

---

## **MATHEMATIQUES**

### **Option Technologique**

---

**DURÉE PRÉCONISÉE : 2 h**

N.B. Vous trouverez du papier millimétré dans votre copie.

## MATHEMATIQUES

### CONCOURS 2002 – OPTION TECHNOLOGIQUE

#### Exercice N° 1

##### Partie A :

Soit  $f$  la fonction définie pour tout réel  $x$  par :

$$f(x) = (x^2 + 1) e^{-x}$$

On désigne par  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère du plan

On donne  $\frac{1}{e} = 0,37$

- 1°)
  - a) Etudier les limites de  $f$  en  $(-\infty)$  et en  $(+\infty)$
  - b) Etudier les branches infinies de  $f$  ; préciser les asymptotes éventuelles.
- 2°)
  - a) Etudier le sens de variation de  $f$ .
  - b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 3°)
  - a) Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à  $(C)$  au point d'abscisse 1.
  - b) Construire  $(C)$  et  $(T)$ .
- 4°) On désigne par  $f^{(n)}$  la dérivée  $n$ -ième de  $f$ .  
On pose  $f^{(0)} = f$  et pour tout  $n$  entier  $f^{(n-1)} = f^{(n)}$

En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer qu'il existe trois suites  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  et  $(c_n)$  telles que :  $f^{(n)}(x) = (a_n x^2 + b_n x + c_n) e^{-x}$

On précisera  $a_0, b_0, c_0$  et on exprimera  $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$  en fonction de  $a_n, b_n, c_n$

## Partie B :

On considère les matrices carrées d'ordre 3 :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A = I + B$$

1°) Calculer  $B^2$ ,  $B^3$

préciser  $B^k$  pour  $k \geq 3$

2°) a) Montrer que  $A$  est inversible.

b) En utilisant la méthode du pivot de Gauss, calculer l'inverse  $A^{-1}$  de  $A$ .

3°) a) En utilisant un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel  $n$  on a :

$$A^n = I + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2$$

b) Expliciter les neuf termes de  $A^n$

4°) Pour tout entier naturel  $n$  on pose  $X_n = \begin{matrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{matrix}$

$(a_n)$ ,  $(b_n)$  et  $(c_n)$  sont les trois suites définies dans la partie A question 4°).

a) Vérifier que, pour tout  $n$  positif,  $X_{n+1} = -AX_n$

b) En raisonnant par récurrence, établir que pour tout entier  $n$  on a :  
 $X_n = (-1)^n A^n X_0$

c) Donner alors les valeurs de  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $c_n$  en fonction de  $n$ .

## Exercice N° 2

On considère deux pièces de monnaie truquées  $M_1$  et  $M_2$ .

Lorsqu'on lance la pièce  $M_1$  la probabilité d'avoir face est égale à  $\frac{1}{3}$  et lorsqu'on lance  $M_2$  cette probabilité est égale à  $\frac{2}{9}$ .

On effectue une succession de parties de la façon suivante :

A la première partie, on prend une des deux pièces au hasard et on lance cette pièce ; si le résultat est face on joue la deuxième partie avec  $M_1$ , sinon on joue avec  $M_2$ .

Pour tout entier  $n \geq 1$  on joue la  $(n + 1)$ -ième partie avec  $M_1$  si on a obtenu face à la  $n$ -ième partie ; on joue la  $(n + 1)$ -ième partie avec  $M_2$  si on a obtenu pile à la  $n$ -ième partie.

On note  $U_n$  la probabilité d'avoir face à la  $n$ -ième partie.

1°) En utilisant la formule des probabilités totales :

a) Calculer les valeurs de  $U_1$  et  $U_2$

b) Etablir que, pour tout  $n \geq 1$ :  $U_{n+1} = \frac{1}{9} U_n + \frac{2}{9}$

2°) Calculer  $U_n$  en fonction de  $n$ .

3°) Pour tout entier  $n \geq 1$  on note  $X_n$  la variable aléatoire associée à la  $n$ -ième partie qui prend la valeur 1 si le résultat de la  $n$ -ième partie est face et 0 sinon

a) Déterminer les lois de probabilité des variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$  et calculer leurs espérances mathématiques .

b) Les variables  $X_1$  et  $X_2$  sont-elles indépendantes ?  
(justifier la réponse)