



CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS  
Direction de l'Enseignement

DIRECTION DES ADMISSIONS ET CONCOURS

E.S.C.P. – E.A.P.

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Jeuudi 15 Mai 2003, de 8 h. à 12 h.

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*

*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Dans tout le problème, on considère un entier naturel  $p$  supérieur ou égal à 2. Pour tout entier naturel  $q$ , on note  $\mathbb{R}_q[X]$  (resp.  $\mathbb{C}_q[X]$ ) l'espace vectoriel réel (resp. complexe) des polynômes à coefficients réels (resp. complexes) de degré au plus égal à  $q$ . On pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée. On note  $\mathcal{S}_{\mathcal{R}}$  (resp.  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ ) l'espace vectoriel réel (resp. complexe) des suites réelles (resp. complexes).

### Préliminaire

On considère la fonction réelle  $f$  qui à tout réel  $x$  positif ou nul associe  $f(x) = x^p - x^{p-1} - 1$ .

- 1) a) Donner le tableau de variation de la fonction  $f$ .
- b) En déduire les résultats suivants :
  - la fonction  $f$  s'annule une seule fois en un réel noté  $C$  qui est strictement supérieur à 1.
  - pour tout réel  $x$  positif ou nul, le réel  $f(x)$  est strictement positif si et seulement si  $x$  est strictement supérieur à  $C$ .

- 2) Dans le cas particulier où l'entier  $p$  est égal à 4, comparer  $C$  et  $\frac{3}{2}$ .

### Partie I

On rappelle que si  $a$  est un nombre complexe et  $Q(X)$  un polynôme à coefficients complexes alors le polynôme  $Q(X)$  est divisible par  $X - a$  si et seulement si le complexe  $Q(a)$  est nul.

- 1) Soit  $a$  un nombre complexe,  $n$  un entier naturel au moins égal à 2 et  $P(X)$  un polynôme à coefficients complexes de degré  $n$  s'écrivant  $P(X) = \sum_{k=0}^n \alpha_k X^k$ .

a) Établir l'égalité :  $P(X) - P(a) = (X - a)Q(X)$  où  $Q(X) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \left( \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-i-1} X^i \right)$ .

- b) En déduire que le polynôme  $P(X) - P(a)$  est divisible par  $(X - a)^2$  si et seulement si le nombre complexe  $\sum_{k=1}^n k \alpha_k a^{k-1}$  est nul.

- c) À quelle condition nécessaire et suffisante le nombre complexe  $a$  est-il racine au moins double du polynôme  $P(X)$  ?



- c) En déduire que pour toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  élément de  $E_Q$ , il existe un élément  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$  de  $\mathbb{C}^p$  tel que, pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a l'égalité :  $u_n = \alpha_1 Z_1^n + \alpha_2 Z_2^n + \dots + \alpha_{p-1} Z_{p-1}^n + \alpha_p C^n + A_0(n)$ .
- d) Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite **réelle** élément de  $E_Q$ . Déduire des questions précédentes que, soit il existe un réel  $\alpha$  non nul tel que  $u_n \sim \alpha C^n$ , soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est négligeable devant la suite  $(C^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  c'est-à-dire  $u_n = o(C^n)$ .
- 3) Soit  $Q(X)$  un polynôme à coefficients réels. On note  $I_Q$  l'ensemble des suites réelles  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  vérifiant, pour tout entier  $n$  strictement supérieur à  $p$ , l'inégalité  $u_n \leq u_{n-1} + u_{n-p} + Q(n)$ . Autrement dit, on a :

$$I_Q = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathcal{SR}; \quad \forall n > p \quad u_n \leq u_{n-1} + u_{n-p} + Q(n) \right\}$$

- a) Soit  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite réelle élément de  $F$  et à termes **strictement positifs**. Pour tout réel  $a$  et tout entier naturel  $n$  non nul, on pose  $v_{a,n} = a w_n + A_0(n)$  et on note  $v_a$  la suite  $(v_{a,n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ .  
Montrer que pour toute suite  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  élément de  $I_Q$ , il existe un réel  $a$  tel que, pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a l'inégalité :  $u_n \leq v_{a,n}$ .
- b) Justifier l'existence d'une suite réelle élément de  $F$  et à termes **strictement positifs**. En déduire que si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite réelle élément de  $I_Q$  et à termes **positifs ou nuls** alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est dominée par la suite  $(C^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  c'est-à-dire  $u_n = O(C^n)$ .

### Partie III

Pour tout entier naturel  $n$  au moins égal à 2, on note  $T_n$ , ou plus simplement  $T$ , l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$  des entiers compris entre 1 et  $n$ . Pour toute partie  $A$  de  $T$  on note  $\text{card } A$  le nombre d'éléments de  $A$ . On considère une matrice  $M = (\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  carrée d'ordre  $n$ , **symétrique**, dont les coefficients valent 0 ou 1, les coefficients diagonaux étant nuls (on dit que  $M$  est une matrice **d'incidence** d'ordre  $n$ ). On a donc :

$$\left( \forall (i, j) \in T^2 \quad (\alpha_{ij} = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha_{ij} = 1) \right) \quad \text{et} \quad \left( \forall i \in T \quad \alpha_{ii} = 0 \right)$$

Pour tout couple  $(i, j)$  d'éléments de  $T$  on dit que  $i$  et  $j$  sont voisins si  $\alpha_{ij} = 1$ . Pour toute partie non vide  $A$  de  $T$  et tout élément  $i$  de  $A$  on note  $A(i)$  l'ensemble des éléments de  $A$  voisins de  $i$  et on dit que  $A(i)$  est l'ensemble des voisins de  $i$  dans  $A$ ; autrement dit, on a :  $A(i) = \{j \in A; \alpha_{ij} = 1\}$ .

Une partie non vide  $S$  de  $T$  est dite stable si, pour tout élément  $i$  de  $S$ ,  $S(i)$  est vide. On remarquera que les singletons de  $T$  sont stables.

Pour toute partie non vide  $A$  de  $T$ , on appelle nombre de stabilité de  $A$  relativement à  $M$  et on note  $\omega(A, M)$ , le maximum des cardinaux des parties stables incluses dans  $A$ , et on pose  $\omega(\emptyset, M) = 0$ .

- 1) Dans cette question, on suppose que  $n = 4$  et que  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

a) Déterminer  $A(1)$  et  $\omega(A, M)$  pour  $A = \{1, 3, 4\}$ .

b) Déterminer le nombre  $\omega(T, M)$ .

- 2) Dans le cas particulier où  $M = (\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  est la matrice dont les coefficients vérifient les conditions :

$$\alpha_{ij} = 1 \quad \text{si} \quad |i - j| = 1 \quad \text{et} \quad \alpha_{ij} = 0 \quad \text{sinon,}$$

déterminer le nombre  $\omega(T, M)$ .

L'objet des questions suivantes est l'étude de la complexité de deux algorithmes de calcul du nombre de stabilité de  $T$  relativement à  $M$ , la complexité d'un tel algorithme étant définie comme étant le nombre maximum de «lectures» de coefficients de la matrice  $M$  que nécessite, dans le pire des cas (suivant les valeurs de  $M$ ), l'exécution de cet algorithme.

- 3) Un algorithme «naïf» consiste à examiner, une à une, les parties à au moins deux éléments de  $T$ , supposées rangées selon un ordre décroissant de leur cardinal (ce rangement étant indépendant de  $M$ ), jusqu'à rencontrer une partie stable (et c'est ce test qui nécessite des lectures dans  $M$ ); bien entendu, si aucune partie stable n'a été rencontrée,  $\omega(T, M)$  vaut 1.

a) Calculer la somme  $\sum_{k=2}^n C_n^k C_k^2$ .

b) Montrer que, pour tout entier  $n$  au moins égal à 2, la complexité de l'algorithme « naïf » est supérieure ou égale à  $2^n - (n + 1)$  et inférieure ou égale à  $C_n^2 2^{n-2}$ .

4) Soit  $A$  une partie non vide de  $T$ .

Montrer que, pour tout élément  $i$  de  $A$ , on a l'égalité :

$$\omega(A, M) = \max \left( \omega(A \setminus \{i\}, M), 1 + \omega(A \setminus (\{i\} \cup A(i)), M) \right)$$

5) On suppose données, en langage Pascal,

- une déclaration de constante permettant de stocker la valeur de l'entier  $n$ , la déclaration du type **tab** permettant de stocker les parties de  $T$ , et la déclaration du type **matrice** permettant de stocker les matrices d'incidence d'ordre  $n$  ;
- une fonction d'en-tête :

```
function Appartient (i : integer ; A : tab) : boolean;
```

qui renvoie la valeur **true** si l'élément  $i$  est dans la partie  $A$  et la valeur **false** sinon.

a) Écrire, en langage Pascal, une fonction d'en-tête :

```
function Recherche (A : tab ; M : matrice) : integer;
```

qui renvoie le plus petit des éléments  $i$  de  $A$  pour lequel  $\text{card } A(i)$  est supérieur ou égal à 3 si un tel plus petit élément existe et qui renvoie 0 sinon.

b) Évaluer le nombre maximum de « lectures » de coefficients de la matrice  $M$  que nécessite cette fonction quand elle est appliquée à la partie  $A$ .

6) On admet qu'il est possible de concevoir une fonction, notée  $Deux(A, M)$  renvoyant, lorsque, pour tout élément  $i$  de  $A$ ,  $\text{card } A(i)$  est inférieur ou égal à 2, le nombre  $\omega(A, M)$  avec une complexité inférieure ou égale à  $(\text{card } A)^2$ .

On considère maintenant la suite d'instructions  $\Omega$  dont on admet qu'elle permet récursivement, quand elle est appliquée à la partie  $A$  de  $T$ , d'obtenir la valeur de  $\omega(A, M)$  :

DÉBUT

- Exécuter  $Recherche(A, M)$  ;

- Si on a obtenu un élément  $i$  de  $A$  tel que  $\text{card}(A(i)) \geq 3$  alors

Exécuter  $\Omega$  pour la partie  $A \setminus \{i\}$  afin d'obtenir  $a = \omega(A \setminus \{i\}, M)$  ;

Exécuter  $\Omega$  pour la partie  $A \setminus (\{i\} \cup A(i))$  afin d'obtenir  $b = \omega(A \setminus (\{i\} \cup A(i)), M)$  ;

Calculer  $\max(a, 1 + b)$  (qui est la valeur de  $\omega(A, M)$  cherchée)

Sinon exécuter  $Deux(A, M)$  pour obtenir  $\omega(A, M)$  ;

FIN

On note  $u_n$  la complexité de cet algorithme lorsqu'il est appliqué à  $A = T$ .

Justifier, pour tout entier  $n$  au moins égal à 6, l'inégalité :  $u_n \leq u_{n-1} + u_{n-4} + 2n^2$ .

7) Comparer, pour de grandes valeurs de l'entier  $n$ , les complexités de l'algorithme « naïf » et de l'algorithme récursif.