CONCOURS D'ADMISSION DE 2004

Option technologique

MATHEMATIQUES

Jeudi 6 mai 2004 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

EXERCICE I : Suites récurrentes et calcul matriciel

On considère une population de N individus où N est un entier naturel non nul. L'objet de cet exercice est l'étude de l'évolution dans le temps du nombre d'abonnés de cette population à un service. Les deux cas étudiés successivement aux questions **2°)** et **3°)** sont indépendants. Pour des raisons évidentes de modélisation, les suites exprimant des nombres d'individus pourront prendre des valeurs non entières. L'exercice commence par un rappel concernant les suites arithmético-géométriques, qui sera utilisé dans la question **2°)**.

1°) Suites arithmético-géométriques

On considère une suite numérique $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme, le réel x_0, et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = a\,x_n + b$$

où a et b sont deux réels tels que $a \neq 0$, $a \neq 1$ et $b \neq 0$. On dit alors que la suite (x_n) est arithmético-géométrique.

a) Montrer qu'il existe un unique réel α tel que :

$$\alpha = a\alpha + b.$$

b) On pose alors, pour tout entier naturel n :

$$y_n = x_n - \alpha.$$

Montrer que la suite (y_n) est géométrique de raison a.

2°) Durée de l'abonnement égal à 1 an

Il est proposé à une population de N individus de s'abonner à un nouveau service. L'abonnement d'une durée de 1 an est renouvelable à la fin de chaque année. On note a_1 le nombre d'abonnés à ce service la première année, a_2 le nombre d'abonnés la deuxième année, etc. On pose $a_0 = 0$.
On suppose que 5 abonnés sur 6 renouvellent leur abonnement en fin d'année et que un tiers des non abonnés d'une année s'abonnent l'année suivante.

a) i) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \frac{N}{3}.$$

ii) Exprimer alors, pour tout entier naturel n, le nombre a_n d'abonnés la n-ième année en fonction de n et de N.

iii) Déterminer la limite de la suite (a_n).

On suppose <u>jusqu'à la fin de la question **2°)**</u> que $N = 15\,000$.

b) Justifier la croissance de la suite (a_n). À partir de quelle année le nombre d'abonnés dépasse-t-il 9900 ?

c) On suppose que l'entreprise qui propose ce service dégage des bénéfices sur un an à partir de 8000 abonnés.

i) Expliquer pourquoi l'entreprise est bénéficiaire sur l'ensemble des n premières années lorsque :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \geq 8000n.$$

ii) Montrer que l'inégalité précédente est équivalente à la suivante :

$$\frac{1}{2^n} + \frac{n}{5} - 1 \geq 0.$$

iii) On pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $s_n = \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{n}{5} - 1$.

Montrer que la suite (s_n) est croissante à partir du rang $n = 2$ et calculer ses premiers termes afin de conclure quant au nombre d'années nécessaire pour que l'entreprise dégage des bénéfices.

3°) Durée de l'abonnement égal à 2 ans

Il est proposé à une population de N individus de s'abonner à un nouveau service pour une durée de 2 ans renouvelable. Les abonnés sont de deux sortes : ceux qui en sont à la première année de l'abonnement en cours et on note u_n leur nombre la n-ième année ; ceux qui en sont à la seconde année de l'abonnement en cours et on note v_n leur nombre la n-ième année. On note w_n le nombre de personnes qui ne sont pas abonnés la n-ième année. On pose $u_0 = 0$, $v_0 = 0$ et $w_0 = N$. On suppose que 8 abonnés sur 10 en fin de contrat renouvellent leur abonnement en fin d'année, que 8 non abonnés sur 10 d'une année s'abonnent l'année suivante et qu'aucune personne ne résilie le contrat en cours d'abonnement.

a) Soit n un entier naturel. Exprimer u_{n+1}, v_{n+1} puis w_{n+1} en fonction de u_n, v_n et w_n.

Soit A la matrice $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Pour tout entier naturel n, on note X_n la matrice-colonne $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

b) Reconnaître le résultat du produit matriciel AX_n.

c) Montrer alors par récurrence que pour tout entier naturel n : $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ N \end{pmatrix}$.

d) On pose $P = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ -1 & -5 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

e) Soit n un entier supérieur ou égal à 1.
   i) On pose $D = P^{-1}AP$. Calculer D et en déduire D^n.
   ii) Montrer que $A^n = PD^nP^{-1}$ puis calculer A^n.
   iii) En déduire les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de n.
   iv) Quel commentaire inspire le résultat du calcul de la somme $u_n + v_n + w_n$?

f) Déterminer les limites de chacune des trois suites (u_n), (v_n) et (w_n).

EXERCICE II : Analyse et probabilités

1°) Étude d'une fonction polynomiale

Soit h un réel appartenant à $[18\,;18{,}75]$. On considère la fonction polynomiale du second degré p définie pour tout réel t par :

$$p(t) = t^2 + t + 18 - h\,.$$

a) Montrer que p admet deux racines distinctes, t_1 et t_2, dont on déterminera les expressions en fonction de h (on notera t_2 la plus grande des deux racines). Quel est le signe de $p(t)$?

b) Vérifier que :

$$t_1 < 0 \le t_2 \le 0{,}5\,.$$

2°) Loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;0{,}5]$

On dit qu'une variable aléatoire réelle X, définie sur un espace probabilisé, suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;0{,}5]$ si elle admet comme densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 2 \text{ si } x \in [0\,;0{,}5] \\ f(x) = 0 \text{ si } x \notin [0\,;0{,}5]. \end{cases}$$

Pour calculer l'intégrale d'une fonction continue sur un segment et nulle en dehors, on utilisera la relation de Chasles comme dans l'exemple ci-dessous :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{0,5} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0,5}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{0,5} 2\,\mathrm{d}x + \int_{0,5}^{+\infty} 0\,\mathrm{d}x = 0 + 0{,}5 \times 2 + 0 = 1$$

Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;0{,}5]$.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

b) Déterminer la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

c) Calculer l'espérance et la variance de X.

3°) Étude de l'heure d'arrivée au cinéma

Deux étudiants, Julie et Cédric, vont chaque semaine voir un film à la séance de 18 h 30 d'un complexe cinématographique. À chaque fois, Julie passe prendre Cédric en voiture au domicile de celui-ci entre 17 h et 17 h 30 avant d'aller ensemble au cinéma.
On suppose que Julie arrive au domicile de Cédric à l'instant $17+T$ (exprimé en heures), où la variable aléatoire *T* suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;0{,}5]$. Ensuite, étant donné la circulation, on suppose que la durée du trajet domicile-cinéma est donnée par la variable aléatoire T^2+1. Enfin, on note *H* l'heure d'arrivée des deux étudiants au cinéma.

a) Donner l'expression de la variable aléatoire *H* en fonction de *T*. Quel est l'ensemble des valeurs prises par *H* ?

b) On cherche à déterminer la fonction de répartition F_H de la variable aléatoire *H*.

  i) *h* étant un réel, déterminer $F_H(h)$ dans les cas $h<18$ et $h>18{,}75$.

  ii) Soit *h* un réel de $[18\,;18{,}75]$. Montrer que :

$$F_H(h)=P(t_1\leq T\leq t_2)\,,$$

  où t_1 et t_2 sont les expressions trouvées à la question **1°)**, puis que :

$$F_H(h)=\sqrt{4h-71}-1.$$

Dans les questions c) et d) qui suivent, après avoir donné les valeurs exactes des probabilités demandées, on vérifiera que les résultats obtenus sont bien compris entre 0 et 1 sans nécessairement en calculer des valeurs approchées. On donne à cet effet les approximations suivantes : $\sqrt{3}\simeq 1{,}73$ et $\sqrt{11}\simeq 3{,}31$.

c) Calculer la probabilité que les deux étudiants arrivent au cinéma avant 18 h 30.

d) Le film commence en fait à 18 h 40 après quelques bandes annonces et réclames.

  i) Calculer la probabilité que les deux étudiants arrivent au cinéma avant le début du film.

  ii) Sachant que les étudiants ne sont encore pas arrivés à 18 h 30, quelle est la probabilité qu'ils arrivent avant le début du film ?

  iii) Sachant que les étudiants sont arrivés avant 18 h 40, quelle est la probabilité qu'ils soient arrivés après le début de la séance ?

e) On admet que la variable aléatoire *H* admet pour densité la fonction *g* définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{2}{\sqrt{4x-71}} \text{ si } x\in[18\,;18{,}75] \\ g(x)=0 \text{ si } x\notin[18\,;18{,}75]. \end{cases}$$

Calculer l'espérance de l'heure d'arrivée des deux étudiants au cinéma (on pourra effectuer le changement de variable $y=4x-71$ et on exprimera le résultat en heures et en minutes).

***