

ECRI COME

Banque d'épreuves communes

aux concours des Ecoles

esc bordeaux / esc marseille / icn nancy / esc reims / esc rouen / esc toulouse

CONCOURS D'ADMISSION
option économique
MATHÉMATIQUES
Année 2005

Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 5 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

Tournez la page
S.V.P

EXERCICE1

On considère, pour tout entier naturel n , l'application φ_n , définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$$

ainsi que l'intégrale : $I_n = \int_0^1 \varphi_n(x) dx$.

On se propose de démontrer l'existence de trois réels, a, b, c tels que

$$I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{\varepsilon(n)}{n^2} \quad \text{avec} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon(n) = 0.$$

1. Calculer I_0, I_1 .
2. Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Déterminer le signe de I_n pour tout entier naturel n .
4. Qu'en déduit-on pour la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
5. Majorer la fonction $g : x \mapsto e^{-2x}$ sur $[0; 1]$.
6. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
7. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
8. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$.
9. En déduire la limite de la suite $(nI_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
10. Déterminer la limite de la suite $(n(nI_n - 1))_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
11. Donner alors les valeurs de a, b, c .

EXERCICE 2.

On considère la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad f(x) = x^2 - x \ln(x) - 1 \quad \text{et} \quad f(0) = -1.$$

ainsi que les fonctions φ et g définies par :

- $\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \varphi(x) = \frac{2}{x} + \ln(x)$
- $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, g(x; y) = xe^y - ye^x$.

On donne le tableau de valeurs de f :

$x =$	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x) \simeq$	-0,4	0	0,6	1,6	3	4,7	6,9	9,5

2.1 Étude de deux suites associées à f .

1. Montrer que f est continue sur \mathbb{R}_+ .
2. Étudier la dérivabilité de la fonction f en 0. En donner une interprétation graphique.
3. Étudier la convexité de f sur \mathbb{R}_+^\times , puis dresser son tableau de variations en précisant la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers l'infini.
4. Étudier la nature de la branche infinie.
5. Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R}_+^\times sur un intervalle J que l'on précisera.
6. Quel est le sens de variation de f^{-1} ? Déterminer la limite de $f^{-1}(x)$ lorsque x tend vers l'infini.
7. Justifier que pour tout entier naturel k , il existe un unique réel x_k positif tel que $f(x_k) = k$.
 - (a) Donner la valeur de x_0 .
 - (b) Utiliser le tableau de valeurs de f pour déterminer un encadrement de x_1 et x_2 .
 - (c) Exprimer x_k à l'aide de f^{-1} puis justifier que la suite (x_k) est croissante et déterminer sa limite lorsque k tend vers l'infini.

8. On définit la suite (u_n) par : $u_0 = \frac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \varphi(u_n)$

- (a) Étudier les variations de φ sur \mathbb{R}_+^\times .
- (b) On donne $\varphi(\frac{3}{2}) \simeq 1,73$ et $\varphi(2) \simeq 1,69$. Montrer que $\varphi\left(\left[\frac{3}{2}; 2\right]\right) \subset \left[\frac{3}{2}; 2\right]$.
- (c) En étudiant les variations de φ' , montrer que : $\forall x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right], |\varphi'(x)| \leq \frac{2}{9}$.
- (d) Montrer que les équations $x = \varphi(x)$ et $f(x) = 1$ sont équivalentes. En déduire que le réel x_1 est l'unique solution de l'équation $x = \varphi(x)$.
- (e) Montrer successivement que pour tout entier n :

$$\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2 \quad ; \quad |u_{n+1} - x_1| \leq \frac{2}{9} |u_n - x_1| \quad ; \quad |u_n - x_1| \leq \left(\frac{2}{9}\right)^n .$$

- (f) En déduire la limite de la suite (u_n) .

2.2 Recherche d'extremum éventuel de g .

1. Calculer les dérivées partielles premières de la fonction g .
2. Montrer que si g admet un extremum local en $(a; b)$ de \mathbb{R}^2 , alors : $ab = 1$ et $a = e^{a-1/a}$.
En déduire que nécessairement $a > 0$, $ab = 1$ et $f(a) = 0$ et donc que le seul point où g peut admettre un extremum est le couple $(1; 1)$.
3. Calculer les réels : $r = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1; 1)$; $s = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(1; 1)$; $t = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(1; 1)$.
4. La fonction g admet-elle un extremum local sur \mathbb{R}^2 ?

EXERCICE 3

On effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie. On suppose que les résultats des lancers sont indépendants et qu'à chaque lancer, la pièce donne pile avec la probabilité p ($0 < p < 1$) et face avec la probabilité $q = 1 - p$. On s'intéresse dans cet exercice à l'apparition de deux piles consécutifs.

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement :

“ deux piles consécutifs sont réalisés pour la première fois aux lancers numéro n et $n + 1$ ”.

On définit alors la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des probabilités des événements A_n par :

Pour tout entier naturel n non nul : $a_n = P(A_n)$ avec la convention $a_0 = 0$.

3.1. Encadrement des racines de l'équation caractéristique.

On considère la fonction polynomiale f de la variable réelle x définie par $f(x) = x^2 - qx - pq$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 avec $r_1 < r_2$.
Exprimer $r_1 + r_2$ et $r_1 \times r_2$ en fonction de p et q .
2. Calculer $f(1)$, $f(-1)$, $f(0)$.
3. En déduire l'encadrement suivant : $|r_1| < |r_2| < 1$.

3.2. Équivalent de a_n quand n tend vers l'infini.

1. Déterminer a_1 , a_2 et a_3 en fonction de p et q .
2. En remarquant que l'événement A_{n+2} est réalisé si et seulement si :
 - on a obtenu pile au premier tirage, face au deuxième tirage, et à partir de ce moment, A_n est réaliséou
 - on a obtenu face au premier tirage, et à partir de ce moment, A_{n+1} est réalisé.

Montrer que l'on a, pour tout entier naturel n : $a_{n+2} - qa_{n+1} - pqa_n = 0$.

3. Écrire un programme, en langage Pascal, permettant de calculer a_n ; l'entier n , le réel p étant donnés par l'utilisateur.
4. Montrer que pour tout entier naturel n ; $a_n = \frac{p^2}{r_2 - r_1} ((r_2)^n - (r_1)^n)$.
5. Donner un équivalent de a_n lorsque n tend vers plus l'infini.

3.3. Expression de a_n en fonction de n par une méthode matricielle.

On définit les matrices A et P par :

$$A = \begin{pmatrix} r_1 + r_2 & -r_1 r_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad P = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ; \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ;$$

ainsi que les matrices unicolonne X_n tout entier naturel n , par : $X_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que pour tout entier naturel n : $X_{n+1} = AX_n$.
2. Montrer que les matrices $A - r_1 I$ et $A - r_2 I$ ne sont pas inversibles.
3. En déduire que A est diagonalisable.
4. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1} .

5. Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$.
(Les coefficients de la matrice D seront exprimés en fonction de r_1 et r_2 seulement).
6. Démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel n ; $X_n = PD^nP^{-1}X_0$.
7. Retrouver ainsi l'expression de a_n en fonction de r_1 , r_2 , p et n .

3.4. Étude du temps d'attente du premier double pile.

On désigne par T l'application associant à toute suite de lancers successifs le numéro du lancer où pour la première fois on obtient un double pile. Ainsi, pour tout entier naturel n ; $P(T = n + 1) = a_n$.

1. Montrer que T est une variable aléatoire, c'est-à-dire que : $\sum_{n=1}^{+\infty} P(T = n + 1) = 1$.
2. Prouver que T admet une espérance $E(T)$, et que : $E(T) = \frac{1+p}{p^2}$.