BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Concepteur : E.S.C.P. – E.A.P.

OPTION : SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Jeudi 19 Mai 2005, de 8h. à 12h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Le problème étudie la notion de taux de panne, d'abord dans le cas discret, en relation avec le concept de produit infini, puis dans le cas des variables aléatoires à densité.

Les parties II et III utilisent les notations et résultats de la partie I. La partie III est indépendante de la partie II. Les parties IV et V sont indépendantes des parties I, II et III. Enfin, la partie V utilise les notations et résultats de la partie IV.

Partie I

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle à valeurs dans $[0,1[$. On lui associe la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\text{pour } n \geqslant 1,\ q_n = \prod_{k=1}^{n}(1-u_k) = (1-u_1)(1-u_2)\dots(1-u_n).$$

1. Montrer que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et que sa limite L vérifie $0 \leqslant L \leqslant 1$.

Si la limite de la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est non nulle, on dit que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est **bien convergente**. *On note alors $L = \prod_{k=1}^{\infty}(1-u_k)$, et on dit aussi que L est un produit infini* **bien convergent**.

2. *Exemples :*
   a) Calculer q_n et déterminer la limite de la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, lorsque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est telle que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.
   b) Étudier de même le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par l'égalité : pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{1}{n+1}$, puis le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par l'égalité : pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle à valeurs dans $[0,1[$.
   a) Montrer que si la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ associée est bien convergente, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente de limite nulle.

b) Montrer que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ associée est bien convergente si et seulement si la série de terme général u_n est convergente.

Partie II

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur Ω, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad P(X \geqslant n) > 0 \qquad (1).$$

On appelle **taux de panne** associé à X, la suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad x_n = P(X = n \mid X \geqslant n) = P_{(X\geqslant n)}(X = n)$$

(probabilité conditionnelle de l'événement $(X = n)$ sachant que l'événement $(X \geqslant n)$ est réalisé).

1. a) Vérifier que la formule $P(\{n\}) = \dfrac{1}{n(n+1)}$ définit bien une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

   (On pourra déterminer deux réels θ et μ tels que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{\mu}{n+1}$.)

   b) Soit alors Y une variable aléatoire définie sur Ω, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, et telle que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

   $$P(Y = n) = \frac{1}{n(n+1)}.$$

   Déterminer le taux de panne associé à Y.

2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, vérifiant (1). Montrer que :

   $$(\forall n \geqslant 2) \quad P(X \geqslant n) = \prod_{k=1}^{n-1}(1 - x_k) = (1 - x_1)(1 - x_2)\ldots(1 - x_{n-1}) \qquad (2)$$

   puis exprimer $p_n = P(X = n)$ en fonction des x_k.

3. Déterminer les lois de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ ayant un taux de panne constant.

4. Montrer qu'une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un taux de panne si et seulement si on a les propriétés suivantes :

   $0 \leqslant x_n < 1$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et la série de terme général x_n diverge.

5. *Application.*

   Dans cette question, a désigne un paramètre réel. On définit les suites $(x_n(a))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(q_n(a))_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

   $$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad x_n(a) = \frac{a^{2^n}}{1 + a^{2^n}} \text{ et } q_n(a) = \prod_{k=1}^{n}(1 - x_k(a))$$

   On pose de plus $q_0(a) = 1$. Enfin, on pose, lorsque ceci a un sens :

   $$S(a) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{a^{2^n}}{\prod_{k=1}^{n}\left(1 + a^{2^k}\right)}\right] \text{ et } L(a) = \lim_{n\to+\infty} q_n(a)$$

   a) Étudier, selon les valeurs de a, la convergence de la suite $(q_n(a))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   b) Pour a non nul et $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $q_{n-1}(1/a)$, puis $x_n(1/a)\,q_{n-1}(1/a)$, à l'aide de a, $q_{n-1}(a)$ et $x_n(a)$.

   c) Pour quelles valeurs de a la suite $(x_n(a))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle un taux de panne ?

   Pour ces valeurs de a, justifier que $L(a)$ et $S(a)$ existent et les calculer.

   d) En déduire, pour tout a réel, l'existence et la valeur de $S(a)$ et $L(a)$.

6. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, vérifiant (1), de taux de panne $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et $(U_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0, 1]$.

   Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid U_k \leqslant x_k\}$, c'est-à-dire de la variable aléatoire Z définie par :

   $$(\forall \omega \in \Omega) \quad Z(\omega) = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid U_k(\omega) \leqslant x_k\}.$$

Partie III

On considère toujours un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'événements de $\mathscr{A}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = P(A_n)$. On note :
$$(\forall N \in \mathbb{N}^*) \quad B_N = \bigcup_{n=N}^{+\infty} A_n \text{ et } C = \bigcap_{N=1}^{+\infty} B_N$$
   a) Montrer que C est l'événement « une infinité d'événements A_n sont réalisés ».
   b) Montrer que si la série de terme général a_n converge, alors $P(C) = 0$.
   c) Montrer que si les événements A_n sont indépendants et si la série de terme général a_n diverge, alors $P(C) = 1$.

2. Vous êtes responsable de la sécurité d'une entreprise. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement « un accident se produit dans cette entreprise durant l'année n (depuis votre prise de fonction) ». On appelle T_n la variable aléatoire égale au numéro de la première année durant laquelle se produit un accident. On suppose que les événements A_n sont indépendants, que l'entreprise a une durée de vie infinie et qu'il ne peut se produire qu'au plus un accident chaque année.

   Vous avez confié l'étude de la sécurité à trois équipes de recherche, qui proposent chacune des mesures permettant de réduire chaque année la probabilité de survenue d'un accident.

   L'équipe I garantit les valeurs : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad a_n = P(A_n) = \dfrac{1}{n+1}$;

   tandis que l'équipe II garantit les valeurs : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad b_n = P(A_n) = \dfrac{1}{(n+1)^2}$;

   et enfin l'équipe III garantit : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad c_n = P(A_n) = \dfrac{1}{2^n}$.

   a) Calculer dans chaque cas, d'une part la probabilité qu'une infinité d'accidents (respectivement un nombre fini d'accidents) se produisent au cours du temps et, d'autre part, le temps d'attente moyen de la survenue du premier accident.
   b) Quelle stratégie adoptez-vous ?

   (Les probabilités précédentes ont été choisies pour la commodité des calculs, mais on pourrait faire un raisonnement analogue avec des valeurs plus réalistes.)

Partie IV

Soit toujours $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé. Dans cette partie, toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur cet espace, sont supposées à densité, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et à densité continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Soit X une variable aléatoire, de fonction de répartition F et de densité f, telle que :
$$\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*\right) \quad P\left(X > x\right) > 0 \qquad (3)$$
   Justifier, pour tout $x > 0$, l'existence de $\varphi(x) = \lim\limits_{h\to 0^+} \left[\dfrac{1}{h} P_{(X>x)}\left(X \leqslant x+h\right)\right]$,

   et vérifier que :
$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} \qquad (4)$$
   On appelle **taux de panne** associé à X la fonction φ ainsi définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. *Exemple.* Soit deux réels α et β strictement positifs. Déterminer la constante K pour que la fonction
$$g : x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{K}{(1+\beta x)^{\alpha+1}} \text{ si } x > 0 \end{cases}$$
   soit une densité de probabilité. Calculer alors le taux de panne associé à une variable aléatoire Y admettant g pour densité.

3. Déterminer les lois de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et à densité continue sur $\mathbb{R}_+^*$ ayant un taux de panne constant.
4. Déterminer la (les) loi(s) (on précisera une densité et la fonction de répartition) d'une variable aléatoire W admettant pour taux de panne :
$$h(t) = a\lambda^a t^{a-1} \text{ pour } t > 0,$$
où a et λ sont deux paramètres strictement positifs. Que trouve-t-on pour $a = 1$?
5. Soit X une variable aléatoire vérifiant la condition (3) ; on note φ son taux de panne.
   a) Étudier la convergence des intégrales $\displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\ \mathrm{d}t$.
   b) Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, soit le taux de panne d'une variable aléatoire. A-t-on unicité de la loi connaissant le taux de panne ?
   c) Existe-t-il des variables aléatoires de taux de panne $\psi : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ pour $x > 0$?

Partie V

$(\Omega, \mathscr{A}, P)$ désigne toujours un espace probabilisé. Dans cette partie, on suppose que X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, de densité f continue et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, de fonction de répartition F et de taux de panne φ. On note G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = 1 - F(x)$.

1. a) Justifier que pour $x > 0$, on peut définir $\Phi(x) = \displaystyle\int_0^x \varphi(t)\ \mathrm{d}t$.
   b) Dresser le tableau des variations de Φ.
2. Montrer que si φ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, alors :
$$\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*\right) \quad \left(\forall y \in \mathbb{R}_+^*\right) \quad G(x+y) \leqslant G(x)G(y).$$
Retrouver ainsi le résultat de la question **IV.3**.
3. a) Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = \Phi(X)$ (la fonction Φ a été définie dans la question 1. de cette partie).
   b) En déduire la loi de la variable aléatoire $Y = F(X)$. Retrouver directement ce résultat.
4. a) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0, 1]$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $V = -\ln U$.
   b) Déduire de ce qui précède un algorithme permettant de simuler, à l'aide du générateur aléatoire « **random** », une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et à densité continue sur $\mathbb{R}_+^*$, de taux de panne donné φ.