ESSEC 2005 MATHEMATIQUES OPTION TECHNOLOGIQUE

EXERCICE I : Calcul matriciel

On considère les deux matrices suivantes : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ et $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1. a) Déterminer la matrice J telle que : $A = I + J$, puis calculer J^2 et J^3.
   b) En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 3, J^n est égale à la matrice nulle.
2. a) A l'aide de la formule du binôme, montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$A^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2 \ .$$

   b) En déduire alors, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'expression sous forme de tableau de la matrice A^n.
3. a) Développer le produit $(I + J) \times (I - J + J^2)$.
   b) En déduire que A est inversible et préciser A^{-1} en fonction de I et J.
   Vérifier que l'égalité obtenue à la question 2.a) reste vraie si $n = -1$.

EXERCICE II : Résolution d'une équation numérique

On note (E) l'équation numérique suivante :

$$\ln x + x = 0 \ .$$

L'objectif de cet exercice est, dans un premier temps, d'établir l'existence et l'unicité de la solution de (E) puis, dans un second temps, de démontrer la convergence d'une suite vers ce réel.

On pourra utiliser les approximations suivantes à 0,1 près : $e \approx 2,7$ et $1/e \approx 0,4$.

1. Existence et unicité de la solution de l'équation (E)

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \ln x + x .$$

a) Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
c) Montrer que l'équation (E) admet une unique solution dans $]0,+\infty[$. On note α ce réel.
d) Montrer que α est compris au sens large entre $1/e$ et 1.
e) Représenter sur un même graphique les courbes d'équations respectives $y = \ln x$ et $y = -x$, ainsi que le point A de coordonnées $(\alpha, 0)$.

2. Etude d'une fonction g

Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{x-\ln x}{2} \quad .$$

a) Montrer que les équations (E) et $g(x)=x$ sont équivalentes.

b) Déterminer g' ; dresser le tableau de variations de g et en déduire que l'intervalle $[1/\mathrm{e},1]$ est stable par g, c'est-à-dire que pour tout réel x de $[1/\mathrm{e},1]$, $g(x)$ appartient à $[1/\mathrm{e},1]$.

c)
- Déterminer g'' et préciser le sens de variation de g' .
- En déduire un encadrement de g' sur l'intervalle $[1/\mathrm{e},1]$ puis, pour tout réel x de $[1/\mathrm{e},1]$ la majoration :

$$|g'(x)|\leq\frac{e-1}{2} \quad .$$

- Vérifier l'inégalité suivante : $\dfrac{e-1}{2}\leq 0,9$.
- Montrer alors que, pour tous réels x et y de $[1/\mathrm{e},1]$, on a :

$$|g(x)-g(y)|\leq 0,9|x-y| \quad .$$

3. Une suite qui converge vers α .

On définit la suite (u_n) en posant :

$$u_0=1 \quad \text{et} \quad \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=g(u_n) \ .$$

a) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, déduire de la question 2. b) que pour tout entier naturel n , u_n appartient à $[1/\mathrm{e},1]$.

b) Montrer alors que pour tout entier naturel n :

$$|u_{n+1}-\alpha|\leq 0,9|u_n-\alpha|$$

puis que :

$$|u_n-\alpha|\leq(0,9)^n \ .$$

c) Conclure quant à la convergence de la suite (u_n) .

d) Déterminer un entier naturel N tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à N , on ait :

$$|u_n-\alpha|\leq 0,001 \ .$$

(on donne à cet effet l'approximation suivante à 0,1 près : $\dfrac{3\ln 10}{\ln 10-\ln 9}\approx 65,6$).

EXERCICE III : Probabilités

1. **Question préliminaire** (une formule sur les coefficients binomiaux)
   Démontrer que, pour tous entiers naturels p et m tels que : $1 \leq p \leq m$, on a l'égalité :
$$\binom{m}{p} = \frac{m}{p}\binom{m-1}{p-1}.$$

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Une urne contient $2n$ boules, parmi lesquelles n sont numérotées de 1 à n, les autres portant toutes le numéro 0.

On s'intéresse à l'expérience aléatoire qui consiste à tirer simultanément dans cette urne n boules au hasard. On considérera qu'un résultat est une partie à n éléments de l'ensemble des $2n$ boules (deux à deux discernables) et on munit l'ensemble Ω des résultats de la loi de probabilité uniforme P (hypothèse d'équiprobabilité).

2. a) Quel est le nombre de résultats possibles de l'expérience aléatoire étudiée ?
   b) Quelle est la probabilité de n'obtenir que des boules portant le numéro 0 ?
   c) Soit i en entier compris au sens large entre 1 et n.
   Justifier qu'il existe exactement $\binom{2n-1}{n-1}$ tirages où apparaît la boule numérotée i.

Dans la suite de cet exercice, pour tout entier naturel i compris au sens large entre 1 et n, on note X_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si la boule portant le numéro i fait partie du tirage et la valeur 0 sinon.

3. Soit i un entier naturel compris au sens large entre 1 et n.
   a) Déterminer la loi de la variable aléatoire X_i (on veillera à donner une expression très simple des résultats en utilisant 1.).
   b) Préciser l'espérance et la variance de X_i.

4. Soient i et j des entiers naturels compris au sens large entre 1 et n.
   a) Calculer la probabilité que la variable aléatoire produit $X_i X_j$ prenne la valeur 1.
   En déduire que l'espérance $E(X_i X_j)$ de $X_i X_j$ vérifie : $E(X_i X_j) = \frac{n-1}{2(2n-1)}$.
   b) Calculer la covariance des variables aléatoires X_i et X_j. Ces variables aléatoires sont-elles indépendantes ?
   Calculer la variance de la variable aléatoire : $X_i + X_j$.

5. On note S la variable aléatoire définie par : $S = \sum_{i=1}^{n} i X_i$.
   a) Interpréter la variable aléatoire S.
   b) Calculer l'espérance de S.
   c) Quelle est la plus petite valeur de n telle que, en moyenne, la somme des points lus sur les

boules tirées dépasse 30 ?

6. Soit Z la variable aléatoire qui donne le nombre de boules portant le numéro 0 obtenues dans le tirage.
   a) Déterminer la loi de probabilité de Z.
   En déduire l'égalité $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.
   b) Dans le cas particulier où n est égal à 2, calculer l'espérance et la variance de Z.

7. Enfin, soit X la variable aléatoire donnant le nombre de boules portant un numéro non nul obtenues dans le tirage.
   a) Que peut-on dire de la variable aléatoire $X+Z$? (Z est définie à la question 6.)
   En déduire une relation simple entre :
      - l'espérance de X et celle de Z ;
      - la variance de X et celle de Z.
   b) Que peut-on dire sans effectuer le moindre calcul, des lois de probabilité de X et Z ?
   Préciser alors l'espérance de chacune des variables aléatoires X et Z ; vérifier la cohérence du résultat avec celui de la question 6.b) .
   c) Exprimer X à l'aides des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$.
   Retrouver la valeur :
      - de l'espérance de X ;
      - de la variance de Z, dans le cas particulier où n est égal à 2.
   d) Du calcul de l'espérance de Z, déduire une expression simplifiée de la somme $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}^2$.