



# BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Concepteurs : H.E.C. – E.S.C.P. – E.A.P.

**CODE ÉPREUVE :**

285

CCIP\_M2\_T

OPTION : TECHNOLOGIQUE

## MATHÉMATIQUES II

Mardi 10 Mai 2005, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

*L'épreuve est constituée de deux exercices indépendants.*

### EXERCICE 1

On rappelle que pour  $k$  et  $n$  entiers naturels, on note  $\binom{n}{k}$  le nombre «  $k$  parmi  $n$  » défini par :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On pourra aussi noter ce nombre  $C_n^k$ .

#### Partie I

Dans cette partie,  $n$  désigne un nombre entier naturel non nul et  $x$  un nombre réel.

1. a) Montrer que, pour  $k$  entier naturel tel que  $1 \leq k \leq n$ , on a :  $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ .

b) En déduire l'égalité :  $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}$ .

c) Montrer de même que si  $n \geq 2$ , on a :  $\sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^{k-2} = n(n-1)(1+x)^{n-2}$ .

2. Calculer les deux sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} x^k.$$

3. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \frac{1}{n+1} ((1+x)^{n+1} - 1)$$

4. Soit  $E$  un ensemble fini ayant  $a$  éléments et  $F$  un ensemble fini ayant  $b$  éléments, avec  $a$  et  $b$  dans  $\mathbb{N}$ . On suppose que  $E$  et  $F$  sont disjoints. Soit  $k$  un nombre entier tel que  $0 \leq k \leq a+b$ .

a) Quel est le nombre de parties de  $E \cup F$  ayant  $k$  éléments ?

b) Soit  $j$  entier naturel tel que  $0 \leq j \leq k$ . Quel est le nombre de parties de  $E \cup F$  ayant  $k$  éléments et contenant  $j$  éléments de  $E$  ?

c) En déduire que  $\sum_{j=0}^k \binom{a}{j} \binom{b}{k-j} = \binom{a+b}{k}$ .

d) En développant de deux façons l'identité suivante, valable pour tout réel  $x$  :

$$(1+x)^{a+b} = (1+x)^a(1+x)^b,$$

retrouver la relation précédente.

## Partie II

Les variables aléatoires qui interviennent dans cette partie sont définies sur un même espace probabilisé  $\Omega$  muni d'une probabilité  $P$ . Dans toute cette partie,  $n$  est un entier naturel non nul et  $p$  est un réel tel que  $0 < p < 1$ . On pose  $q = 1 - p$ .

1. On considère une variable aléatoire  $X$  qui suit la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ . On a donc :

$$\text{pour } j \in \mathbb{N}, \text{ tel que } 0 \leq j \leq n, P(X = j) = \binom{n}{j} p^j q^{n-j}.$$

Rappeler, sans démonstration, les expressions de l'espérance  $E(X)$  et de la variance  $V(X)$  de la variable aléatoire  $X$ , en fonction de  $n$  et  $p$ .

2. Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes telles que  $X$  suit la loi binomiale de paramètres  $a$  et  $p$ , et  $Y$  suit la loi binomiale de paramètres  $b$  et  $p$ ,  $a$  et  $b$  étant deux entiers naturels non nuls fixés. On pose  $Z = X + Y$  et on cherche à déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire  $Z$ .

a) Montrer que l'ensemble  $Z(\Omega)$  des valeurs prises par  $Z$  est :  $Z(\Omega) = \{0, 1, \dots, a + b - 1, a + b\}$ .

b) Calculer l'espérance  $E(Z)$  et la variance  $V(Z)$  de  $Z$ .

c) Pour  $k \in \{0, 1, \dots, a + b - 1, a + b\}$ , montrer que :

$$(Z = k) = \bigcup_{\substack{0 \leq i \leq a \\ 0 \leq j \leq b \\ i+j=k}} [(X = i) \cap (Y = j)]$$

d) En déduire, pour  $k \in \{0, 1, \dots, a + b - 1, a + b\}$ , l'égalité :  $P(Z = k) = \binom{a+b}{k} p^k q^{a+b-k}$ .

e) Conclure.

3. Pour tout entier  $i$  tel que  $0 \leq i \leq a$  et tout entier  $k$  tel que  $0 \leq k \leq a + b$ , on cherche à évaluer la probabilité conditionnelle  $P_{(Z=k)}(X = i)$  (probabilité conditionnelle de l'événement  $(X = i)$  sachant que l'événement  $(Z = k)$  est réalisé).

a) Montrer que si  $i \leq k$ , on a :  $[(X = i) \cap (Z = k)] = [(X = i) \cap (Y = k - i)]$ . Que se passe-t-il si  $i > k$  ?

b) En déduire la loi conjointe du couple  $(X, Z)$ , puis la probabilité conditionnelle  $P_{(Z=k)}(X = i)$ .

4. On désigne par  $\text{Cov}(X, Z)$  la covariance des deux variables aléatoires  $X$  et  $Z$ .

Montrer que  $\text{Cov}(X, Z) = V(X)$  et en déduire le coefficient de corrélation linéaire  $\rho_{X,Z}$  de  $X$  et  $Z$ .

5. Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ . Calculer l'espérance de la variable aléatoire  $U = \frac{1}{X+1}$ .

## EXERCICE 2

*L'objet de cet exercice est l'étude de quelques propriétés mathématiques de la valeur actualisée nette d'un projet d'investissement et du taux de rentabilité interne de ce projet.*

Une entreprise envisage d'acquérir un nouveau matériel dont le prix est égal à  $I$  et dont la durée de vie est estimée à  $n$  années ( $n$  entier naturel non nul donné), sans valeur résiduelle (au terme des  $n$  années, le prix de revente du matériel est nul).

Pour  $k$  entier tel que  $1 \leq k \leq n$ , l'utilisation de ce nouvel investissement procurera à l'entreprise, à la fin de la  $k^{\text{ème}}$  année, une recette nette  $R_k$ .

On suppose que les réels  $I, R_1, \dots, R_n$  sont strictement positifs.

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]-1, +\infty[$  par :

$$f(x) = -I + \sum_{k=1}^n \frac{R_k}{(1+x)^k}$$

(pour un taux d'actualisation égal à  $100x$  (en %), le réel  $f(x)$  représente la valeur actualisée nette du projet d'investissement).

Dans les parties I et II, on suppose que l'entier  $n$  et les réels  $R_1, \dots, R_n$  sont donnés et vérifient l'inégalité suivante :

$$\sum_{k=1}^n R_k > I.$$

### Partie I

1. Établir le tableau des variations de la fonction  $f$ .

2. a) Donner l'allure de la courbe représentative de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthogonal. Préciser les branches infinies de cette courbe.

b) La fonction  $f$  est-elle convexe sur son intervalle de définition ?

3. Montrer qu'il existe un unique réel  $\bar{x}$  tel que  $f(\bar{x}) = 0$ . Vérifier que  $\bar{x}$  est strictement positif. (le réel  $\bar{x}$  représente le taux de rentabilité interne associé au projet d'investissement)

### Partie II

Dans cette partie, on suppose que pour tout entier  $k$  tel que  $1 \leq k \leq n$ ,  $R_k = R$ , c'est-à-dire que tous les réels  $R_1, \dots, R_n$  sont égaux, leur valeur commune étant le réel strictement positif noté  $R$ .

1. a) Pour  $q$  réel, rappeler l'expression de la somme  $\sum_{k=1}^n q^k$  en fonction de  $q$  et  $n$ .

b) En déduire l'expression suivante de  $f$  :

$$f(x) = \begin{cases} R \times \frac{1 - (1+x)^{-n}}{x} - I & \text{si } x \in ]-1, 0[ \cup ]0, +\infty[ \\ nR - I & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. On rappelle que  $\bar{x}$  désigne l'unique solution de l'équation  $f(x) = 0$  (voir la question 3 de la partie I).

Écrire la relation vérifiée par  $\bar{x}, R, I$  et  $n$ . En déduire que si on pose  $\bar{X} = 1 + \bar{x}$ , on a :

$$\bar{X}^{n+1} - \left(1 + \frac{R}{I}\right) \bar{X}^n + \frac{R}{I} = 0$$

3. a) Soit  $h$  la fonction définie sur  $[1, +\infty[$  par :

$$h(t) = t^{n+1} - \left(1 + \frac{R}{I}\right)t^n + \frac{R}{I}$$

Calculer  $h(1), h\left(1 + \frac{R}{I}\right)$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t)$ .

b) Dresser le tableau des variations de  $h$  et montrer que  $h$  admet un *minimum* atteint pour une valeur  $t_0$  de  $t$ , que l'on déterminera. Montrer que  $t_0$  est strictement supérieur à 1 et que  $h(t_0)$  est strictement négatif.

c) Montrer qu'il existe un unique réel  $\bar{X}$  appartenant à l'intervalle  $]t_0, 1 + \frac{R}{I}[$ , tel que  $h(\bar{X}) = 0$ . En déduire les inégalités suivantes :

$$0 < \frac{1}{n+1} \left(n \frac{R}{I} - 1\right) < \bar{x} < \frac{R}{I}.$$

### Partie III

On reprend dans cette partie, les mêmes hypothèses que celles de la partie II, mais on ne suppose plus que l'entier strictement positif  $n$  est fixé. Ainsi, les réels strictement positifs  $I$  et  $R$  sont donnés et pour tout entier  $k$  supérieur ou égal à 1, on a  $R_k = R$ .

On note alors :  $f_n(x) = -I + \sum_{k=1}^n \frac{R}{(1+x)^k}$ .

On pose  $a = \frac{R}{I}$  et on désigne par  $A$  la partie de  $\mathbb{N}^*$  formée de tous les entiers  $n$  qui vérifient  $n > \frac{1}{a}$  :  
 $A = \{n \in \mathbb{N}^* / n > \frac{1}{a}\}$ .

1. a) Soit  $(a_n)_{n \in A}$  la suite définie pour tout  $n$  appartenant à  $A$ , par l'égalité :  $a_n = \frac{1}{n+1}(na - 1)$ .

Étudier la monotonie et la convergence de cette suite.

b) Pour  $n$  appartenant à  $A$ , on désigne par  $\bar{x}_n$  la solution strictement positive de l'équation  $f_n(x) = 0$ .  
 Montrer que  $0 < a_n < \bar{x}_n < a$ .

En déduire la limite de la suite  $(\bar{x}_n)_{n \in A}$ .

2. a) Pour  $n \in A$ , on pose  $K_n = \int_{a_n}^a f_n(x) dx$ .

Montrer l'égalité :

$$K_n = a_n I - R + R \ln\left(\frac{R}{a_n I}\right) - R \int_{a_n}^a \frac{dx}{x(1+x)^n}$$

b) Montrer que l'on a :  $0 \leq \int_{a_n}^a \frac{dx}{x(1+x)^n} \leq \frac{1}{(n-1)a_n} \left[ \left(\frac{1}{1+a_n}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{1+a}\right)^{n-1} \right]$ .

c) En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{a_n}^a \frac{dx}{x(1+x)^n} = 0$ .

d) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n$ .