BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Concepteur :

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

CODE EPREUVE :

298

EDHECMATE

MATHEMATIQUES

Option économique

Mardi 9 mai 2006 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}.$$

On note I la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $u = (2, 1, -2)$.

1) a) Montrer que $\text{Ker} f = \text{vect}(u)$.

b) La matrice A est-elle inversible ?

2) a) Déterminer le vecteur v de $\mathbb{R}^3$, dont la 2ème coordonnée dans $\mathcal{B}$ vaut 1, et tel que $f(v) = u$.

b) Démontrer que le vecteur w de $\mathbb{R}^3$, dont la 2ème coordonnée dans $\mathcal{B}$ vaut 1, et qui vérifie $f(w) = v$ est $w = (0, 1, -1)$.

c) Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ que l'on notera $\mathcal{B}'$. On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

3) a) Écrire la matrice N de f relativement à la base $\mathcal{B}'$. En déduire la seule valeur propre de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

b) Donner la relation liant les matrices A, N, P et P^{-1}, puis en déduire que, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, on a : $A^k = 0$.

4) On note C_N (respectivement C_A) l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec N (respectivement A).

a) Montrer que C_N est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que $C_N = \text{vect}(I, N, N^2)$.

On admet que C_A est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b) Établir que : $M \in C_A \Leftrightarrow P^{-1}MP \in C_N$. En déduire que $C_A = \text{vect}(I, A, A^2)$.

Quelle est la dimension de C_A ?

Exercice 2

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(1-x)^2} & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[\\ \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1[\\ 0 \text{ sinon.} & \end{cases}$

1) Montrer que f peut être considérée comme une densité de probabilité.

Dans toute la suite, on considère une variable aléatoire X définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et admettant la fonction f pour densité.

2) Déterminer la fonction de répartition F de X.

3) Montrer que X a une espérance et que celle-ci vaut $\dfrac{1}{2}$.

4) a) Déterminer $E\left((X-1)^2\right)$.

b) En déduire que X a une variance et que $V(X) = \dfrac{3}{4} - \ln 2$.

5) On appelle variable indicatrice d'un événement A, la variable de Bernoulli qui vaut 1 si A est réalisé et 0 sinon.

On considère maintenant la variable aléatoire Y, indicatrice de l'événement $(X \leq \dfrac{1}{2})$ et la variable aléatoire Z, indicatrice de l'événement $(X > \dfrac{1}{2})$.

a) Préciser la relation liant Y et Z puis établir sans calcul que le coefficient de corrélation linéaire de Y et Z, noté $\rho(Y, Z)$, est égal à -1.

b) En déduire la valeur de la covariance de Y et Z.

Exercice 3

Soit f la fonction définie pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y$.

1) a) Calculer les dérivées partielles premières de f.

b) En déduire que le seul point critique de f est $A = (\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{6})$.

2) a) Calculer les dérivées partielles secondes de f.

b) Montrer que f présente un minimum local en A et donner la valeur m de ce minimum.

3) a) Développer $2(x + \dfrac{y}{2} - \dfrac{1}{4})^2 + \dfrac{3}{2}(y - \dfrac{1}{6})^2$.

b) En déduire que m est le minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

4) On considère la fonction g définie pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par :
$g(x,y) = 2e^{2x} + 2e^{2y} + 2e^{x+y} - e^x - e^y$.

a) Utiliser la question 3) pour établir que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x,y) \geq -\dfrac{1}{6}$.

b) En déduire que g possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et préciser en quel point ce minimum est atteint.

Problème

Partie 1 : étude d'une variable discrète sans mémoire.

Soit X une variable aléatoire discrète, à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que : $\forall m\in\mathbb{N},\ P(X \geq m) > 0$.

On suppose également que X vérifie :$\forall(m, n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N},\ P_{(X \geq m)}(X \geq n+m) = P(X \geq n)$.

On pose $P(X = 0) = p$ et on suppose que $p > 0$.

1) On pose $q = 1-p$. Montrer que $P(X \geq 1) = q$. En déduire que $0 < q < 1$.

2) Montrer que : $\forall(m, n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N},\ P(X \geq n+m) = P(X \geq m)P(X \geq n)$.

3) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $u_n = P(X \geq n)$.

a) Utiliser la relation obtenue à la deuxième question pour montrer que la suite (u_n) est géométrique.

b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, exprimer $P(X \geq n)$ en fonction de n et de q.

c) Établir que : $\forall n\in\mathbb{N},\ P(X = n) = P(X \geq n) - P(X \geq n + 1)$.

d) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $P(X = n) = q^n p$.

4) a) Reconnaître la loi suivie par la variable $X + 1$.

b) En déduire $E(X)$ et $V(X)$.

Partie 2 : taux de panne d'une variable discrète.

Pour toute variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telle que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $P(Y \geq n) > 0$, on définit le taux de panne de Y à l'instant n, noté λ_n, par : $\forall n\in\mathbb{N},\ \lambda_n = P_{(Y \geq n)}(Y = n)$.

1) a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ \lambda_n = \dfrac{P(Y=n)}{P(Y \geq n)}$.

b) En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N},\ 1 - \lambda_n = \dfrac{P(Y \geq n+1)}{P(Y \geq n)}$.

c) Établir alors que : $\forall n\in\mathbb{N},\ 0 \leq \lambda_n < 1$.

d) Montrer par récurrence, que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ P(Y \geq n) = \prod_{k=0}^{n-1}(1 - \lambda_k)$.

2) a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n-1} P(Y = k) = 1 - P(Y \geq n)$.

b) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} P(Y \geq n) = 0$.

c) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} - \ln(1 - \lambda_k) = +\infty$.

d) Conclure quant à la nature de la série de terme général λ_n.

3) a) On considère la déclaration de fonction, en Pascal, rédigée de manière récursive :

```
Function f(n : integer) : integer ;
Begin
If (n = 0) then f: = ------
            else f: = ------- ;
end ;
```

Compléter cete déclaration pour qu'elle renvoie $n!$ lorsqu'on appelle $f(n)$.

b) On considère la déclaration de fonction récursive suivante :

```
Function g(a : real ; n : integer) : real ;
Begin
If (n = 0) then g : = 1
        else g : = a * g(a, n-1) ;
end ;
```

Dire quel est le résultat retourné à l'appel de $g(a, n)$.

c) Proposer un programme (sans écrire la partie déclarative) utilisant ces deux fonctions et permettant d'une part le calcul de la somme $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{k!} e^{-a}$ et d'autre part, à l'aide du résultat de la question 1a), le calcul et l'affichage du taux de panne à l'instant n d'une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $a > 0$, lorsque n et a sont entrés au clavier par l'utilisateur (on supposera $n \geq 1$).

d) Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle renvoie la valeur de $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{k!} e^{-a}$ à l'appel de *sigma*(a, n).

```
Function sigma(a : real ; n : integer) : real ;
  var k : integer ;
    p : real ;
  Begin
    p : = 1 ; s : = 1 ;
    For k : = 1 to n-1 do begin p : = p * a / k ; s : = ....... ; end ;
    s : = ....... ;
    sigma : = s ;
  end ;
```

Partie 3 : caractérisation des variables dont la loi est du type de celle de X.

1) Déterminer le taux de panne de la variable X dont la loi a été trouvée à la question 3d) de la partie 1.

2) On considère une variable aléatoire Z, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(Z \geq n) > 0$. On suppose que le taux de panne de Z est constant, c'est-à-dire que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n = \lambda$.

a) Montrer que $0 < \lambda < 1$.

b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, déterminer $P(Z \geq n)$ en fonction de λ et n.

c) Conclure que les seules variables aléatoires Z à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont le taux de panne est constant et telles que pour tout n de $\mathbb{N}$, $P(Z \geq n) > 0$, sont les variables dont la loi est du type de celle de X.