ESPRIT GÉNÉRAL

Objectifs de l'épreuve
Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.
Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème...).
Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

Sujets
Trois exercices indépendants portant sur les trois domaines du programme
Instruments de calcul interdits, tables de lois fournies

Evaluation
Exercices de valeur sensiblement égale.

ÉPREUVE 2007

Durée : 4 heures
Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé.
Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

SUJET

1. EXERCICE.

On considère la fonction f déterminée sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{x - 1 + \ln x}{x^2}$$

On se propose dans cet exercice d'étudier la fonction f et de la représenter relativement à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, l'unité choisie étant le cm.

1.1. Etude d'une fonction g auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \qquad g(x) = x^3 - x + 3 - 2\ln x$$

1. Soit P la fonction polynôme déterminée $P(x) = 3x^3 - x - 2$.

   a. Prouver que P est factorisable par $x - 1$.

   b. Ecrire $P(x)$ sous la forme d'un produit de $x - 1$ par un polynôme $Q(x)$ que l'on déterminera.

   c. Déterminer alors le signe de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2. Vérifier que la fonction dérivée g' peut s'écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \qquad g'(x) = \frac{P(x)}{x}$$

3. En déduire les variations de g sur son domaine d'étude.

4. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \qquad g(x) > 0$$

1.2. Etude de la fonction f.

1. Déterminer la limite de $f\ (x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Que peut-on en déduire pour la représentation graphique de f, notée $\mathcal{C}_f$?

2. a. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque que x tend vers $+\infty$.

   b. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x+1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

   c. Montrer que sur $[1, +\infty[$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la droite (Δ).

3. On donne le tableau de valeurs suivant :

x	$0,5$	3
$f(x)$	$-3,3$	$4,3$

   a. Vérifier que la fonction dérivée f' peut s'écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \qquad f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$$

   b. En déduire les variations de f.

   c. Donner l'allure de $\mathcal{C}_f$ et tracer la droite (Δ).

   d. Hachurer la partie du plan comprise entre $\mathcal{C}_f$, (Δ) et les deux droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.

   e. Ecrire, à l'aide d'une intégrale, la valeur de l'aire de la partie hachurée du plan.

   f. A l'aide d'une intégration par parties, déterminer la valeur de cette intégrale.

2. EXERCICE.

On se propose de déterminer la suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence :

Pour tout entier naturel n : $\quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$
avec $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$

A cet effet on définit la matrice A par :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.1. Calcul de la puissance $n^{\text{ème}}$ de A.

On considère les matrices à coefficients réels B et C définies par :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer BC et CB.
2. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul :
$$B^n = B\ , \qquad C^n = (-1)^{n-1}C$$
3. Vérifier que l'on a :
$$A^2 = 5A - 6I$$
où I est la matrice carrée unité d'ordre 2.
4. Etablir que la matrice A est-inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I.
5. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n :
$$A^n = 3^n B - 2^n C$$
La relation précédente est-elle encore vraie pour $n = -1$. C'est-à-dire a-t-on :
$$A^{-1} = \frac{1}{3}B - \frac{1}{2}C\ ?$$
6. Montrer que pour tout entier naturel n :
$$\left(A^{-1}\right)^n = \frac{1}{3^n}B - \frac{1}{2^n}C$$

2.2. Expression de u_n en fonction de n.

1. Vérifier que pour tout entier naturel n :
$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n :
$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
3. Donner ainsi l'expression de u_n en fonction de n.

3. EXERCICE.

Soucieux de mieux connaître sa clientèle, un gérant de magasin a réalisé une étude :

3.1. Etude du temps moyen d'attente en caisse.

Après enquête, on estime que le temps d'attente en caisse, exprimé en unités de temps, est une variable aléatoire T dont une densité de probabilité est donnée par la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3} & \text{si } x \geqslant 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On suppose que les temps d'attente successifs d'une même personne lors des différents passages en caisse sont indépendants.

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.

2. On note F_T la fonction de répartition de la variable T. Démontrer que :

$$\begin{cases} F_T(x) = 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ F_T(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

3. Vérifier que la probabilité que le temps d'attente en caisse soit supérieur à quatre unités (de temps) est égale à $\dfrac{1}{25}$.

4. Quelle est la probabilité que le temps d'attente en caisse soit inférieur à cinq unités sachant qu'il est supérieur à quatre unités ?

5. Pendant 125 jours une même personne se présente à la caisse.
On note X la variable aléatoire représentant le nombre de fois où cette personne attend plus de quatre unités à la caisse.

   a. Déterminer la loi de X.

   b. Donner la valeur de l'espérance et de la variance de X.

6. Plus impatient, un autre client décide de passer à la concurrence le jour où il attend plus de quatre unités à la caisse.
On note Y la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de fois où ce client s'est présenté à la caisse de ce magasin avant de passer à la concurrence, si cet événement se produit.

   a. Déterminer la loi de Y.

   b. Donner la valeur de l'espérance et de la variance de Y.

3.2. Mode de paiement de la clientèle.

L'étude du mode de paiement en fonction du montant des achats a permis d'établir les probabilités suivantes :

$$P[S=0\cap U=0]=0.4$$
$$P[S=0\cap U=1]=0.3$$
$$P[S=1\cap U=0]=0.2$$
$$P[S=1\cap U=1]=0.1$$

où S représente la variable aléatoire prenant la valeur 0 si le montant des achats est inférieur ou égal à 50 euros, prenant la valeur 1 sinon, et U la variable aléatoire prenant la valeur 0 si la somme est réglée par carte bancaire, prenant la valeur 1 sinon.

1. Déterminer les lois de S et U .
2. Calculer la covariance du couple (S,U). Les variables S et U sont-elles indépendantes ?
3. Quelle est la probabilité que la somme réglée soit supérieure strictement à 50 euros sachant que le client utilise un autre moyen de paiement que la carte bancaire ?

CORRIGÉ

1. EXERCICE.

On considère la fonction f déterminée sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x)=x+1+\frac{x-1+\ln x}{x^2}$$

On se propose dans cet exercice d'étudier la fonction f et de la représenter relativement à un repère orthonormal $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$, l'unité choisie étant le cm.

1.1. Etude d'une fonction g auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x\in\mathbb{R}^{+*}\qquad g(x)=x^3-x+3-2\ln x$$

1. Soit P la fonction polynôme déterminée $P(x)=3x^3-x-2$.

   a. $P(1)=0$ donc P est factorisable par $x-1$.

   b. $P(x)$ peut s'écrire sous la forme

   $$P(x)=(x-1)(3x^2+3x+2)$$

   c. Le discriminant du polynôme $Q(x)=3x^2+3x+2$ est négatif, le signe de P est donc celui de $x-1$.

2. La fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \qquad g'(x) = 3x^2 - 1 - \frac{2}{x} = \frac{P(x)}{x}$$

3. La fonction g est donc strictement décroissante sur $]0, 1[$ et strictement croissante sur $]1, +\infty[$.

4. Le minimum de g est $g(1) = 3 > 0$, on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \qquad g(x) > 0$$

1.2. Etude de la fonction f.

1. Déterminons la limite de $f\ (x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x + 1 + \frac{x - 1 + \ln x}{x^2} = -\infty$$

car

$$\lim_{x\to 0^+} x - 1 + \ln x = -\infty, \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

a. Déterminons la limite de $f(x)$ lorsque que x tend vers $+\infty$.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} x + 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2} = +\infty$$

car par prépondérance de la fonction puissance,

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$$

b.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) - x - 1 = \lim_{x\to +\infty} +\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2} = 0$$

Donc la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

c. Sur $[1, +\infty[, \dfrac{x - 1 + \ln x}{x^2} > 0$, donc la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la droite (Δ).

2. On donne le tableau de valeurs suivant :

x	$0,5$	3
$f(x)$	$-3,3$	$4,3$

a. La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \qquad f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} - \frac{2}{x^3}\ln x + \frac{1}{x^3} = \frac{x^3 - x + 3 - 2\ln x}{x^3}$$

b. Le signe de f' est celui de g. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

c. Allure de $\mathcal{C}_f$ voir l'annexe.

d. Voir l'annexe.

e. Aire exprimée en unités d'aire de la partie hachurée du plan :

$$Aire = \int_1^e [f(x) - (x+1)]\,dx = \int_1^e \left[\frac{x - 1 + \ln x}{x^2}\right] dx$$

$$\begin{array}{ll} u(x) = x - 1 + \ln x & u'(x) = 1 + \dfrac{1}{x} \\ v'(x) = \dfrac{1}{x^2} & v(x) = -\dfrac{1}{x} \end{array}$$

$$= \left[-\frac{x - 1 + \ln x}{x}\right]_1^e + \int_1^e \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right] dx =$$
$$= -1 + \left[\ln x - \frac{1}{x}\right]_1^e = 1 - \frac{1}{e}$$

f. Déterminons la valeur de cette intégrale.

$$\begin{array}{ll} u(x) = x - 1 + \ln x & u'(x) = 1 + \dfrac{1}{x} \\ v'(x) = \dfrac{1}{x^2} & v(x) = -\dfrac{1}{x} \end{array}$$

$$= \left[-\frac{x - 1 + \ln x}{x}\right]_1^e + \int_1^e \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right] dx =$$
$$= -1 + \left[\ln x - \frac{1}{x}\right]_1^e = 1 - \frac{1}{e}$$

2. EXERCICE.

On se propose de déterminer la suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence :

Pour tout entier naturel n : $\quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$
avec $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$

A cet effet on définit la matrice A par :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.1. Calcul de la puissance $n^{ème}$ de A.

On considère les matrices à coefficients réels B et C définies par :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Calculons BC et CB.

$$BC = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = 0$$
$$CB = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 0$$

2. Montrons, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul :

$$\mathcal{H}_n \qquad B^n = B\ , \qquad C^n = (-1)^{n-1}C$$

$\mathcal{H}_1$ est vraie. Supposons que $\mathcal{H}_n$ soit vraie pour un certain n,

$$B^{n+1} = B^nB = B^2 = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = B$$
$$C^{n+1} = C^nC = (-1)^{n-1}C^2 = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = (-1)^nC$$

$\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie et l'axiome de récurrence achève la démonstration.

3. Vérifions que l'on a :

$$A^2 = 5A - 6I$$

$$A^2 - 5A + 6I = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

4. On a :

$$A\frac{1}{6}(A - 5I) = \frac{1}{6}(A - 5I)A = I$$

Ceci nous prouve que la matrice A est-inversible et :

$$A^{-1} = \frac{1}{6}(A - 5I)$$

5. Montrons, par récurrence, que pour tout entier naturel n :

$$\mathcal{H}_n \qquad A^n = 3^nB - 2^nC$$

$\mathcal{H}_1$ est vraie puisque $A^0 = I = B - C$ .Supposons que $\mathcal{H}_n$ soit vraie pour un certain n,

$$A^{n+1} = AA^n = (3B - 2C)\,(3^nB - 2^nC) = \left(3^{n+1}B - 2^{n+1}C\right)$$

$\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie et l'axiome de récurrence achève la démonstration.Vérifions si cette relation est encore vraie pour $n = -1$.

$$\left(\frac{1}{3}B - \frac{1}{2}C\right)A = \left(\frac{1}{3}B - \frac{1}{2}C\right)(3B - 2C) = B^2 + C^2 = B - C = I$$

Ceci prouve que :

$$A^{-1} = \frac{1}{3}B - \frac{1}{2}C$$

6. Montrons, par récurrence, que pour tout entier naturel n :

$$\mathcal{H}_n \qquad \left(A^{-1}\right)^n = \frac{1}{3^n}B - \frac{1}{2^n}C$$

$\mathcal{H}_0$ est vraie puisque $A^0 = I = B - C$. Supposons que $\mathcal{H}_n$ soit vraie pour un certain n,

$$(A^{-1})^{n+1} = A^{-1}A^{-n} = \left(\tfrac{1}{3}B - \tfrac{1}{2}C\right)\left(\tfrac{1}{3^n}B - \tfrac{1}{2^n}C\right)$$
$$= \frac{1}{3^{n+1}}B^2 + \frac{1}{2^{n+1}}C^2 = \frac{1}{3^{n+1}}B - \frac{1}{2^{n+1}}C$$

$\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie et l'axiome de récurrence achève la démonstration.

2.2. Expression de u_n en fonction de n.

1. On vérifie sans peine que pour tout entier naturel n :
$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

2. Puis par une récurrence immédiate que pour tout entier naturel n :
$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Ainsi :
$$\begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = (3^n B - 2^n C)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= 3^n \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2^n \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$
$$= 3^n \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} - 2^n \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3^{n+1} + 2^{n+2} \\ -3^n + 2^{n+1} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3^{n-1} + 2^{n+2} \\ -3^n + 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

D'où l'expression de u_n en fonction de n.
$$u_n = -3^n + 2^{n+1}$$

3. EXERCICE.

Soucieux de mieux connaître sa clientèle, un gérant de magasin a réalisé une étude :

3.1. Etude du temps moyen d'attente en caisse.

Après enquête, on estime que le temps d'attente en caisse, exprimé en unités de temps, est une variable aléatoire T dont une densité de probabilité est donnée par la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3} & \text{si } x \geqslant 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On suppose que les temps d'attente successifs d'une même personne lors des différents passages en caisse sont indépendants.

1. f est continue,sauf en 0, positive.
$$\lim_{A \to +\infty} \int_{-\infty}^{A} f(t)dt = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A \frac{2}{(t+1)^3}dt = \lim_{A \to +\infty} \left[-\frac{1}{(t+1)^2}\right]_0^A = 1$$

   f est bien une densité de probabilité.

2. Soit F_T la fonction de répartition de la variable T.

$$\begin{cases} F_T(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{2}{(t+1)^3} = \left[-\frac{1}{(t+1)^2}\right]_0^x = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ F_T(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

3. Probabilité que le temps d'attente en caisse soit supérieur à quatre unités (de temps)

$$P(T > 4) = 1 - F_T(4) = \frac{1}{(4+1)^2} = \frac{1}{25}.$$

4. Probabilité que le temps d'attente en caisse soit inférieur à cinq unités sachant qu'il est supérieur à quatre unités.

$$P_{(T>4)}(T < 5) = \frac{P(4 < T < 5)}{P(T > 4)} = \frac{F_T(5) - F_T(4)}{1 - F_T(4)}$$
$$= \frac{1/25 - 1/36}{1/25} = 1 - \frac{25}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

5. Pendant 125 jours une même personne se présente à la caisse.
On note X la variable aléatoire représentant le nombre de fois où cette personne attend plus de quatre unités à la caisse.

   a. La loi suivie par X est une loi binômiale de paramètres $(125, \frac{1}{25})$.

   b. La valeur de l'espérance est de $\frac{125}{25} = 5$ et la valeur de la variance est de $5\frac{24}{25} = \frac{24}{5}$.

6. Plus impatient, un autre client décide de passer à la concurrence le jour où il attend plus de quatre unités à la caisse.
On note Y la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de fois où ce client s'est présenté à la caisse de ce magasin avant de passer à la concurrence, si cet événement se produit.

   a. La loi de Y est une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{25}$, déterminée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad P(Y = k) = \left(\frac{24}{25}\right)^{k-1} \frac{1}{25}$$

   b. L'espérance et la variance de Y valent :

$$E(Y) = 25, V(Y) = \frac{24}{25}25^2 = 600$$

3.2. Mode de paiement de la clientèle.

L'étude du mode de paiement en fonction du montant des achats a permis d'établir les probabilités suivantes :

$$\begin{aligned}
P\left[S=0 \cap U=0\right] &= 0.4\\
P\left[S=0 \cap U=1\right] &= 0.3\\
P\left[S=1 \cap U=0\right] &= 0.2\\
P\left[S=1 \cap U=1\right] &= 0.1
\end{aligned}$$

où S représente la variable aléatoire prenant la valeur 0 si le montant des achats est inférieur ou égal à 50 euros, prenant la valeur 1 sinon, et U la variable aléatoire prenant la valeur 0 si la somme est réglée par carte bancaire, prenant la valeur 1 sinon.

1. Déterminons les lois de S et U.

$$P(S=0) = P\left[S=0 \cap U=0\right] + P\left[S=0 \cap U=1\right] = 0.7$$
$$P(S=1) = P\left[S=1 \cap U=0\right] + P\left[S=1 \cap U=1\right] = 0.3$$

$$P(U=0) = P\left[S=0 \cap U=0\right] + P\left[S=1 \cap U=0\right] = 0.6$$
$$P(U=1) = P\left[S=0 \cap U=1\right] + P\left[S=1 \cap U=1\right] = 0.4$$

2. Calculons la covariance du couple (S, U).

$$\begin{aligned}
&cov(S,U) = E(SU) - E(S)E(U)\\
&cov(S,U) = P\left[S=1 \cap U=1\right] - P(S=1)P(U=1)\\
&= 0.1 - 0.3 \times 0.4 = -0.02
\end{aligned}$$

Les variables S et U ne sont pas indépendantes puisque $cov(S,U) \neq 0$.

3. Probabilité que la somme réglée soit supérieure strictement à 50 euros sachant que le client utilise un autre moyen de paiement que la carte bancaire.

$$P(S=1/U=1) = \frac{P\left[S=1 \cap U=1\right]}{P(U=1)} = \frac{0.1}{0.4} = \frac{1}{4}$$

RAPPORT

Je remercie les correcteurs qui, par leur rapport détaillé de correction, m'ont permis d'établir les remarques suivantes.

EXERCICE 1

Cet exercice d'analyse ne présente pas de grosses difficultés puisque les résultats utiles pour la suite sont donnés dans l'énoncé. Les étudiants le traitent donc en général complètement. On constate des erreurs et souvent un manque de justification dans les limites (citer le théorème des croissances comparées et conclure ne suffisaient pas ici, il fallait modifier l'écriture de la fonction). Beaucoup ne confrontent pas les résultats des limites avec les variations des fonctions et ne se rendent pas compte de leurs erreurs. Peu abordent correctement et jusqu'au bout le calcul d'intégration par parties.

EXERCICE 2

Comme pour l'exercice précédent, les étudiants le traitent en entier .Il y a des erreurs de rédaction dans les récurrences. Les initialisations n'étaient pas évidentes, il y avait toujours un calcul matriciel à effectuer que certains n'ont pas fait .On trouve aussi un certain nombre d'erreurs de calculs sur les puissances de nombres réels dans la dernière question.

EXERCICE 3 OU PROBLÈME

Cet exercice couvrait une très large partie du programme de probabilités de la voie technologique. La justification de la densité et de la fonction de répartition est en général très succincte (la continuité est le plus souvent citée sans que l'on parle du problème en 0 et les calculs d'intégrales généralisées peu rigoureux). L'utilisation de la fonction de répartition dans le calcul de probabilité pose des difficultés tout comme la définition de la probabilité conditionnelle. La loi binomiale est bien reconnue et justifiée, on ne peut pas en dire autant pour la loi géométrique. Les questions sur le couple de variables aléatoires sont relativement bien traitées quand elles sont abordées.

CONCLUSION

Le sujet était bien adapté à la voie technologique. Trop peut-être. Le souhait des correcteurs de proposer quelques questions plus délicates et donc plus sélectives sera entendu. Avec un écart-type de **4.69** et une moyenne générale de **10.10** cette épreuve semble avoir malgré tout joué son rôle discriminant, permettant d'étaler clairement les notes.