



BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Concepteur Epreuves ESC : ESC CHAMBERY

CODE SUJET :

294

ESC_MATT

OPTION TECHNOLOGIQUE

MATHEMATIQUES

mardi 15 Mai 2007, de 14 h. à 18 h.

N.B.

Il n'est fait usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer les produits matriciels $A(A - I)$ et $B(B - I)$.
- (b) En déduire que $A^2 = A$ et $B^2 = B$.
- (c) Calculer AB ainsi que BA (ces deux produits donnent un résultat simple).

On note dans toute la suite $W = A + 2B$.

2. (a) Calculer les produits $A \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
 - (b) En déduire que $W \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. La matrice W est-elle inversible ?
 - (c) Montrer que $W = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 6 \\ 2 & 6 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ et retrouver le résultat précédent par méthode du pivot.
3. (a) En utilisant les relations obtenues en question 1., montrer que $W^2 = A + 4B$.
 - (b) Plus généralement, montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul :
$$W^n = A + 2^n B.$$

Dans toute la suite de cet exercice on note pour tout réel x la matrice $H(x) = A + xB$.

4. (a) Calculer le produit $H(x) \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et en déduire que la matrice $H(x)$ n'est pas inversible.
- (b) Montrer que pour tous réels x et y , $H(x)H(y) = H(xy)$.
- (c) En déduire par récurrence sur n que pour tout entier naturel n non nul : $(H(x))^n = H(x^n)$.
Quelle relation retrouve-t-on en prenant $x = 2$?

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(t) = 0 & \text{si } t \leq 0 \\ f(t) = e^{-\frac{2}{3}t} - e^{-2t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

1. (a) Montrer que f est continue sur $] -\infty ; 0]$ et sur $] 0 ; +\infty [$.
- (b) Déterminer $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$ puis en déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.

(c) Soit θ un réel de l'intervalle $]0; 1[$. Montrer que : $\theta - \theta^3 \geq 0$.

(d) Montrer que si $t > 0$ alors $e^{-\frac{2}{3}t}$ est un réel de l'intervalle $]0; 1[$.

En déduire grâce à la question (c), et en posant $\theta = e^{-\frac{2}{3}t}$, que $f(t) \geq 0$.

Dans toute la suite de l'exercice on note pour tout réel x : $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$.

2. (a) Que vaut $F(x)$ lorsque $x \leq 0$?

Justifier que si $x > 0$, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

(b) Montrer que pour tout réel x strictement positif et pour tout réel a strictement positif,

$$\int_0^x e^{-at} dt = \frac{1}{a} (1 - e^{-ax}).$$

(c) En déduire que pour tout réel x strictement positif : $F(x) = 1 - \frac{3}{2}e^{-\frac{2}{3}x} + \frac{1}{2}e^{-2x}$.

(d) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

On considère alors une variable aléatoire X admettant une densité f , et de fonction de répartition F .

3. On s'intéresse dans cette question à l'équation notée (E) :

$$P(X \leq \mu) = P(X > \mu) \quad (\text{E})$$

équation dont l'inconnue est le réel μ strictement positif.

(a) Justifier que pour tout réel x , $P(X > x) = 1 - P(X \leq x)$.

En déduire que l'équation (E) est équivalente à l'équation (E') :

$$P(X \leq \mu) = \frac{1}{2} \quad (\text{E}')$$

(b) Montrer que $(\text{E}') \Leftrightarrow 1 - 3e^{-\frac{2}{3}\mu} + e^{-2\mu} = 0$.

(c) Montrer que la fonction g définie sur $]0; 1[$ par : $g(\theta) = 1 - 3\theta + \theta^3$ réalise une bijection de $]0; 1[$ sur $] -1; 1[$.

(d) En déduire par le même changement de variable qu'au 1. (d) que l'équation (E) admet une et une seule solution (qu'on ne cherchera pas à calculer).

EXERCICE 3

Un sac S contient cinq jetons : deux sont numérotés 1 et les trois autres sont numérotés 2.

Les parties A, B et C de cet exercice sont indépendantes, elles correspondent à des expériences aléatoires différentes utilisant le sac mentionné ci-dessus.

Partie A

1. Montrer que si l'on extrait deux jetons simultanément de S , la probabilité que ces deux jetons portent le numéro 2 est : $p = \frac{3}{10}$. (On pourra conserver cette notation dans la suite de cette partie A).
2. Dans cette question on considère le sac S et on effectue 2100 tirages simultanés de deux jetons avec remise (les deux jetons obtenus à chaque tirage sont remis dans le sac S avant le tirage des deux jetons suivants). On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages où les deux jetons tirés portent le numéro 2.
 - (a) Reconnaître la loi de probabilité de la variable aléatoire X . (On précisera $X(\Omega)$ et $P(X = k)$ pour tout k de $X(\Omega)$).
 - (b) Déterminer l'espérance mathématique $E(X)$ et vérifier que $V(X) = (21)^2$.
3.
 - (a) On décide d'une approximation de X par une variable T suivant une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Quelles valeurs donner à m et σ pour que X et T aient même espérance et même variance ?
 - (b) Calculer alors la probabilité $P(588 < T \leq 672)$ en utilisant la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite. (On donne $\Phi(2) \approx 0,97725$)

Partie B

On effectue une série illimitée de tirages avec remise d'un jeton dans le sac S . On désigne par Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués avant le tirage amenant un jeton numéroté 1 pour la première fois.

1.
 - (a) Justifier que la variable aléatoire $Z = Y + 1$ suit une loi classique.
 - (b) En déduire $Y(\Omega)$ puis la probabilité $P(Y = k)$ pour tout entier k de $Y(\Omega)$.
2.
 - (a) Préciser l'espérance mathématique et la variance de Z .
 - (b) En déduire l'espérance mathématique et la variance de Y .

Partie C

On extrait successivement et avec remise deux jetons du sac S .

On désigne par X_1 la variable aléatoire égale à la somme des numéros des deux jetons tirés, et par X_2 la variable aléatoire égale au maximum des numéros des deux jetons tirés.

1. Donner la loi de probabilité du couple (X_1, X_2) , en présentant les résultats dans un tableau à double entrée.
2. En déduire la loi de probabilité de X_1 et celle de X_2 .
3. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?