



BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

CODE SUJET :

285

CCIP_M2_T

Conceptions : H.E.C. – E.S.C.P. – E.A.P.

OPTION : TECHNOLOGIQUE

MATHÉMATIQUES II

Mercredi 9 Mai 2007, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants

Exercice 1

Le réel e désigne la base du logarithme népérien.

Pour tout entier naturel n , on définit la fonction f_n par la relation suivante, valable pour tout réel x :

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}} \text{ si } n \text{ est supérieur ou égal à } 1, \text{ avec } f_0(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}.$$

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

1. Vérifier que pour tout réel x , on a : $\frac{1}{1 + e^{-x}} = \frac{e^x}{1 + e^x}$.
2. (a) Calculer la dérivée de la fonction qui, à tout réel x associe $\ln(1 + e^x)$, et en déduire la valeur de u_0 .
(b) Montrer que : $u_0 + u_1 = 1$, et en déduire la valeur de u_1 .
3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante, et en déduire qu'elle est convergente. On note l sa limite.
4. (a) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a : $u_n + u_{n-1} = \frac{1}{n-1}(1 - e^{-n+1})$.
(b) En déduire la valeur de l .

5. (a) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k (1 - e^{-k+1})}{k-1} = u_1 + (-1)^n u_n.$$

- (b) En déduire la valeur de $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k (1 - e^{-k+1})}{k-1}$.

Exercice 2

Toutes les matrices considérées dans cet exercice sont des matrices carrées d'ordre 3.

On note I la matrice définie par : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n), (e_n), (f_n), (g_n), (h_n), (i_n)$ désignent neuf suites convergentes, de limites respectives $a, b, c, d, e, f, g, h, i$, on pose :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & f_n \\ g_n & h_n & i_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

Si A est une matrice carrée d'ordre 3, on pose, pour tout entier naturel n , $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} A^k$, c'est-à-dire que

$S_n = I + \frac{1}{1!} A + \frac{1}{2!} A^2 + \dots + \frac{1}{n!} A^n$. On pose également $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$, lorsque cette limite existe.

1. Dans cette question, la matrice A est donnée par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- Calculer A^2 .
- Calculer A^3 puis, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, déterminer A^k .
- Donner, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'expression de S_n sous forme de tableau matriciel.
- En déduire l'expression de la matrice S .

2. Dans cette question, la matrice A est donnée par : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Calculer A^2 .
- À l'aide d'un raisonnement par récurrence, déterminer, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, l'expression de A^k en fonction de k .

- (c) Établir, pour tout entier naturel n , l'égalité suivante : $S_n = I + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^n \frac{3^k}{k!} - 1 \right) A$.

- (d) Donner l'expression de S sous forme de tableau matriciel.

3. Dans cette question, la matrice A est donnée par : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Calculer $A^2 - 2A + I$.
- Établir, pour tout k de $\mathbb{N}$, la relation : $A^k = kA - (k-1)I$.
- Donner l'expression de S_n en fonction de A et de I .

- (d) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n , $\sum_{k=0}^n \frac{k-1}{k!} = -\frac{1}{n!}$.

En déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{k-1}{k!}$

(e) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{k}{k!} = e$.

(f) Dédurre des questions précédentes, l'expression de S sous forme de tableau matriciel.

Exercice 3

Dans cet exercice, tous les événements considérés sont définis sur un même espace fondamental Ω muni d'une probabilité P .

Pour tout événement M et tout événement N tel que $P(N) \neq 0$, on rappelle que la probabilité conditionnelle de M sachant N , notée $P_N(M)$, est donnée par : $P_N(M) = \frac{P(M \cap N)}{P(N)}$.

On note $\overline{M}$ l'événement contraire de M .

1. On considère trois événements A, B, C tel que $P(B) \neq 0$, $P(B) \neq 1$, $P(C) \neq 0$, $P(B \cap C) \neq 0$.

(a) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que $P(A \cap C) = P(A \cap B \cap C) + P(A \cap \overline{B} \cap C)$.

(b) En déduire alors la formule suivante : $P_C(A) = P_{B \cap C}(A)P_C(B) + P_{\overline{B} \cap C}(A)P_C(\overline{B})$.

Dans la suite de l'exercice, on s'intéresse à l'expérience aléatoire suivante : on lance indéfiniment une pièce amenant *Pile* avec la probabilité p ($0 < p < 1$), et *Face* avec la probabilité q , où $q = 1 - p$.

On admet que les résultats des différents lancers sont indépendants.

Pour tout entier naturel k non nul, on note F_k l'événement : « on obtient *Face* à l'issue du k -ième lancer ». $\overline{F}_k$ est donc l'événement : « on obtient *Pile* à l'issue du k -ième lancer ».

On considère l'événement E : « 2 *Face* consécutifs apparaissent avant l'apparition éventuelle de 2 *Pile* consécutifs ».

Par exemple :

- si les résultats des six premiers lancers sont $F_1 \overline{F}_2 F_3 \overline{F}_4 F_5 F_6$, alors E est réalisé ;
- si les résultats des six premiers lancers sont $\overline{F}_1 F_2 F_3 \overline{F}_4 \overline{F}_5 F_6$, alors E est réalisé ;
- si les résultats des six premiers lancers sont $F_1 \overline{F}_2 F_3 \overline{F}_4 \overline{F}_5 F_6$, alors $\overline{E}$ est réalisé.

2. (a) Donner sans calcul la valeur de $P_{F_1 \cap F_2}(E)$.

(b) Justifier également sans calcul la relation suivante : $P_{F_1 \cap \overline{F}_2}(E) = P_{\overline{F}_1}(E)$.

(c) En utilisant la relation trouvée à la question 1(b), avec $A = E$, $B = F_2$ et $C = F_1$, trouver une relation entre $P_{F_1}(E)$ et $P_{\overline{F}_1}(E)$.

3. (a) Que vaut $P_{\overline{F}_1 \cap \overline{F}_2}(E)$?

(b) Montrer que $P_{\overline{F}_1 \cap F_2}(E) = P_{F_1}(E)$.

(c) Toujours en utilisant la relation de la question 1(b) appliquée à des événements bien choisis, montrer que $P_{\overline{F}_1}(E) = qP_{F_1}(E)$.

4. (a) Dédurre des questions 2 et 3 les égalités : $P_{F_1}(E) = \frac{q}{1 - pq}$ et $P_{\overline{F}_1}(E) = \frac{q^2}{1 - pq}$.

(b) Calculer $P(E)$ en fonction de p et de q .

5. On note G l'événement « 2 *Pile* consécutifs apparaissent avant l'apparition éventuelle de 2 *Face* consécutifs »

(a) Expliquer comment trouver $P(G)$ sans calcul.

(b) Vérifier que $P(E) + P(G) = 1$. Comment interpréter ce dernier résultat ?

Exercice 4

Pour toute variable aléatoire Z admettant une espérance et une variance, ces dernières sont notées $E(Z)$ et $V(Z)$ respectivement.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = ax^2 + b & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où a et b sont deux réels.

1. Vérifier que f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X dont l'espérance vaut $\frac{3}{5}$, si et seulement si $a = \frac{6}{5}$ et $b = \frac{3}{5}$.

Dans toute la suite, on prendra pour a et b les valeurs données ci-dessus.

2. Calculer la variance de X .
3. Déterminer la fonction de répartition, notée F , de la variable aléatoire X .
4. $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, étant une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la même loi que X , on considère, pour tout entier naturel n non nul, la variable aléatoire S_n définie par :
 $S_n = \sup(X_1, X_2, \dots, X_n)$, c'est-à-dire telle que pour tout réel x , on a :
 $[S_n \leq x] = ([X_1 \leq x] \cap [X_2 \leq x] \cap \dots \cap [X_n \leq x])$.

- (a) Montrer que la fonction de répartition de la variable aléatoire S_n , notée F_n , est donnée par :

$$\begin{cases} F_n(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ F_n(x) = \left(\frac{2x^3 + 3x}{5}\right)^n & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ F_n(x) = 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- (b) Justifier que $E(S_n) = \int_0^1 x f_n(x) dx$, où f_n désigne une densité de S_n .

- (c) En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, la formule suivante : $E(S_n) = 1 - \int_0^1 F_n(x) dx$.

- (d) Établir, pour tout x de $[0, 1]$, l'inégalité suivante : $F_n(x) \leq \left(\frac{3x+2}{5}\right)^n$.

- (e) Pour tout x de $[0, 1]$, on pose $g_n(x) = \left(\frac{3x+2}{5}\right)^n$.

Vérifier qu'une primitive G_n de g_n sur $[0, 1]$ est donnée par : $G_n(x) = \frac{5}{3(n+1)} \left(\frac{3x+2}{5}\right)^{n+1}$.

- (f) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(S_n) = 1$.