



# BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

**CODE SUJET :**  
**280**  
**HEC\_M1\_S**

**Concepteur : H.E.C.**

OPTION : SCIENTIFIQUE

## MATHÉMATIQUES I

Mercredi 2 Mai 2007, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2, on note  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients réels,  $I$  la matrice identité, et  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices à  $n$  lignes et 1 colonne. On confond  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  et  $\mathbb{R}^n$ .

### Préliminaire

Soit  $E$  un espace vectoriel réel. On appelle *norme* sur  $E$ , toute application  $\nu$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}^+$  vérifiant :

- i)  $\nu(x) = 0$  si et seulement si  $x = 0$  ;
- ii) pour tout  $\lambda$  réel, pour tout  $x$  de  $E$  :  $\nu(\lambda x) = |\lambda|\nu(x)$  ;
- iii) pour tout couple  $(x, y)$  de  $E$  :  $\nu(x + y) \leq \nu(x) + \nu(y)$ .

Montrer que l'application  $\| \cdot \|_\infty$  de  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$  définie par : pour tout vecteur  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  de  $\mathbb{R}^n$ ,

$\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ , est une norme sur  $\mathbb{R}^n$ .

### Partie I

#### A. Une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Montrer que l'application qui, à toute matrice  $A = (a_{i,j})$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , associe le réel  $\max_{1 \leq i \leq n} \left( \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right)$ , définit une norme sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . La norme de  $A$  sera notée  $\|A\|$ .

2. a) Établir pour tout  $X$  de  $\mathbb{R}^n$ , l'inégalité :  $\|AX\|_\infty \leq \|A\| \times \|X\|_\infty$ .

b) Montrer qu'il existe un vecteur  $X_0$  de  $\mathbb{R}^n$ , non nul, tel que  $\|AX_0\|_\infty = \|A\| \times \|X_0\|_\infty$ .

En déduire que  $\|A\| = \sup_{X \in \mathbb{R}^n, X \neq 0} \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}$ .

c) Établir alors que pour tout couple  $(A, B)$  de  $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ , on a  $\|AB\| \leq \|A\| \times \|B\|$ .

On dit qu'une suite  $(A_m)_{m \geq 0}$  de matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  converge vers une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , si  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \|A_m - A\| = 0$ . On pose  $A_m = (a_{i,j}(m))_{1 \leq i,j \leq n}$  et  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ .

3. a) Montrer que  $(A_m)_{m \geq 0}$  converge vers  $A$  si et seulement si pour tout  $(i, j)$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket^2$  :  $\lim_{m \rightarrow +\infty} a_{i,j}(m) = a_{i,j}$ .

b) Montrer que si  $(A_m)_{m \geq 0}$  converge vers  $A$  et  $(B_m)_{m \geq 0}$  converge vers  $B$ , alors  $(A_m B_m)_{m \geq 0}$  converge vers  $AB$ .

4. Soit  $A$  un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  tel que  $\|A\| < 1$ .

a) Déterminer  $\lim_{m \rightarrow +\infty} A^m$ .

b) Montrer que si  $\lambda$  est une valeur propre réelle de  $A$ , alors  $|\lambda| < 1$ . En déduire que les matrices  $I - A$  et  $I + A$  sont inversibles.

c) Montrer que la suite  $\left( \sum_{k=0}^m A^k \right)_m$  converge, et exprimer sa limite en fonction de la matrice  $A$ .

Soit  $(A_m)_{m \geq 0}$  une suite de matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On dit que la série de terme général  $A_m$  (qu'on notera  $\sum_{m \geq 0} A_m$ ) converge, si la suite  $\left( \sum_{m=0}^p A_m \right)_p$  converge. Dans ce cas, sa limite est notée  $\sum_{m=0}^{+\infty} A_m$ .

5. On considère dans cette question, une matrice non nulle  $N$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  qui vérifie la propriété suivante : il existe un entier  $p$  supérieur ou égal à 2 tel que  $N^p = 0$  et  $N^{p-1} \neq 0$ .

a) Montrer que la série  $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} N^k$  converge. On note  $M = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} N^k$ .

b) Montrer que  $\{X \in \mathbb{R}^n / (M - I)X = 0\} = \{X \in \mathbb{R}^n / NX = 0\}$ .

6. a) Soit  $D$  une matrice diagonale de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que la série  $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} D^k$  converge.

b) Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  diagonalisable,  $D$  une matrice diagonale et  $P$  une matrice inversible telles que  $A = PDP^{-1}$ . Montrer que la série  $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} A^k$  converge, et exprimer sa somme  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$  en fonction de  $P$  et  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} D^k$ .

On admet jusqu'à la fin du problème que pour toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , la série  $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} A^k$  converge,

et on note :  $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$ .

7. Soit  $A$  un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On pose, pour tout  $m$  de  $\mathbb{N}^*$  :  $A_m = \left( I + \frac{1}{m} A \right)^m$ .

a) Établir l'inégalité :

$$\left\| \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} A^k - A_m \right\| \leq \sum_{k=0}^m \left( 1 - \frac{m(m-1) \cdots (m-k+1)}{m^k} \right) \frac{\|A\|^k}{k!}$$

b) En déduire que la suite  $(A_m)_m$  converge vers  $\exp(A)$ .

## B. Propriétés de l'exponentielle de matrice

On admet que si  $A$  et  $B$  sont éléments de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  tels que  $AB = BA$ , alors,  $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$ .

1. Montrer que pour toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , la matrice  $\exp(A)$  est inversible et déterminer son inverse.
2. a) Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe une matrice  $S_A$  telle que  $\exp(A) - I = A(I + S_A)$ .  
b) Étudier la fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :  $x \mapsto e^x - 1 - 2x$ .  
c) En déduire que si  $\|A\| < 1$ , alors  $\|S_A\| < 1$ .  
d) On suppose que  $\|A\| < 1$  et que  $\exp(A) = I$ . Montrer que  $A$  est la matrice nulle.
3. On note  $\mathcal{S}_n$  l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles d'ordre  $n$ , et  $\mathcal{S}_n^{++}$  l'ensemble des matrices symétriques réelles d'ordre  $n$  dont les valeurs propres sont strictement positives.  
a) Montrer que si  $A$  est un élément de  $\mathcal{S}_n$ , alors  $\exp(A)$  est un élément de  $\mathcal{S}_n^{++}$ .  
b) Montrer que l'application  $\exp$  restreinte à  $\mathcal{S}_n$  est une surjection de  $\mathcal{S}_n$  sur  $\mathcal{S}_n^{++}$ .
4. Soit  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{S}_n$  telles que  $\exp(A) = \exp(B)$ . On note  $u$  (resp.  $v$ ) l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé à  $A$  (resp.  $B$ ), et  $\exp(u)$  (resp.  $\exp(v)$ ) l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé à  $\exp(A)$  (resp.  $\exp(B)$ ).  
a) Montrer que  $A$  et  $B$  ont les mêmes valeurs propres.  
b) Montrer que  $A \times \exp(B) = \exp(B) \times A$ .  
c) Soit  $F$  un sous-espace propre de  $v$ .  
i) Montrer que  $F$  est également un sous-espace propre de  $\exp(v)$ .  
ii) Montrer que la restriction de  $u$  à  $F$  induit un endomorphisme de  $F$  diagonalisable.  
d) En se plaçant dans une base de diagonalisation de  $v$ , montrer alors que  $u$  et  $v$  ont les mêmes vecteurs propres. En déduire que  $A = B$ .

## Partie II

1. On considère  $\mathbb{R}^n$  muni de sa base canonique  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ .  
Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  défini par  $f(e_1) = 0$ , et pour tout  $i$  de  $\llbracket 2, n \rrbracket$ ,  $f(e_i) = e_{i-1}$ .  
On note  $N$  la matrice associée à  $f$  relativement à la base  $\mathcal{B}$ . Déterminer, pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$ , la matrice  $N^k$ .
2. Soit  $p$  un réel de  $]0, 1[$ . On définit les matrices  $R_p$  et  $Q_p$  par :  $R_p = (1 - p)I + pN = I + Q_p$ .  
a) Établir l'égalité :  $\exp(Q_p) = \sum_{j=0}^{n-1} e^{-p} \frac{p^j}{j!} N^j$ .  
b) Calculer  $\|R_p\|$  et  $\|Q_p\|$ . Montrer que  $\|\exp(Q_p)\| \leq 1$ .
3. a) Soit  $m$  un entier supérieur ou égal à 1, et  $p_1, p_2, \dots, p_m$  des réels de l'intervalle  $]0, 1[$ .  
On pose pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, m \rrbracket$ ,  $R_i = R_{p_i}$  et  $Q_i = Q_{p_i}$ . Montrer les égalités suivantes :

$$\prod_{k=1}^m \exp(Q_k) = \exp\left(\sum_{k=1}^m Q_k\right) = \exp\left(\left[-\sum_{k=1}^m p_k\right](I - N)\right)$$

- b) Établir la relation suivante :

$$\prod_{k=1}^m R_k - \prod_{k=1}^m \exp(Q_k) = [R_1 - \exp(Q_1)](R_2 \times \dots \times R_m) - \exp(Q_1)[\exp(Q_2) \times \dots \times \exp(Q_m) - R_2 \times \dots \times R_m]$$

- c) En déduire la majoration suivante :  $\left\| \prod_{k=1}^m R_k - \prod_{k=1}^m \exp(Q_k) \right\| \leq \sum_{k=1}^m \|R_k - \exp(Q_k)\|$ .

4. a) Montrer l'égalité :  $\|\exp(Q_1) - R_1\| = |e^{-p_1} - 1 + p_1| + p_1|e^{-p_1} - 1| + e^{-p_1} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{p_1^k}{k!}$ .

b) En déduire successivement les deux inégalités :

$$\|\exp(Q_1) - R_1\| \leq 2p_1^2 \quad \text{et} \quad \left\| \prod_{k=1}^m R_k - \prod_{k=1}^m \exp(Q_k) \right\| \leq 2 \sum_{k=1}^m p_k^2$$

### Partie III.

Les notations sont celles de la partie II.

On considère  $m$  pièces de monnaie ( $1 \leq m < n$ ), telles que pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, m \rrbracket$ , la  $i$ -ième pièce donne Pile avec la probabilité  $p_i$ , et Face avec la probabilité  $1 - p_i$ . On pose  $\lambda = \sum_{i=1}^m p_i$ .

Un joueur lance successivement la première pièce, la deuxième pièce, etc. jusqu'à la  $m$ -ième pièce, cette expérience étant modélisée par un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Pour tout  $k$  de  $\llbracket 1, m \rrbracket$ , on note  $S_k$  la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus à l'issue des  $k$  premiers lancers.

1. a) Montrer que pour tout  $k$  de  $\llbracket 1, m \rrbracket$ , les  $k+1$  premiers éléments de la première ligne du produit matriciel  $R_1 \times R_2 \times \dots \times R_k$  représentent la loi de  $S_k$ .

b) Montrer la relation suivante :  $\left\| \prod_{i=1}^m R_i - \prod_{i=1}^m \exp(Q_i) \right\| = \sum_{k=0}^{n-1} \left| P([S_m = k]) - e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \right|$ .

c) En déduire l'inégalité suivante :  $\sum_{k=0}^{+\infty} \left| P([S_m = k]) - e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \right| \leq 2 \sum_{i=1}^m p_i^2$ .

2. Dans un programme Pascal sont faites les déclarations suivantes :

```
const m = ... ;
Type tab = array[1..m] of real ;
Var prob : tab ;
```

On suppose que prob contient les probabilités  $p_1, p_2, \dots, p_m$  (ainsi prob[1] contient  $p_1$  etc.)

Écrire une fonction Pascal dont l'en-tête est `Sm(prob : tab) : integer` qui simule la variable aléatoire  $S_m$ .