*INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ETUDES ECONOMIQUES*

ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE DE L'INFORMATION

# Concours d'élève ingénieur de l'ENSAI

# Concours d'attaché statisticien

MAI 2008

**SPECIALITE ECONOMIE**

## composition de mathématiques

**Durée : 4 heures**

*L'usage des calculatrices est interdit.*

*Le sujet comprend 4 pages (y compris celle-ci)*

*Le sujet se compose de 3 parties indépendantes*

**Première partie :**

Dans toute cette partie, $I$ désigne la matrice identité de dimension 3. On considère la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que les valeurs propres de la matrice $M$ sont 1 et 3. Est-ce-que la matrice $M$ est diagonalisable dans $M_3(\mathbf{R})$ ?

2) Déterminer trois constantes réelles $a, b, c$ telles que pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{1, 3\}$,

$$\frac{1}{(x-1)^2(x-3)} = \frac{ax+b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-3)}.$$

On pose $P_1 = (aM + bI)(M - 3I)$ et $P_2 = c(M - I)^2$.

3) Calculer les matrices $P_1,\ P_2,\ P_1^2,$ et $P_2^2$.

4) On note $D = P_1 + 3P_2$ et $N = M - D$.

4-a) Calculer $D,\ N,\ N^2,\ DN$ et $ND$.

4-b) Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}, D^k = P_1 + 3^k P_2$. (Avec par convention, $D^0 = I$).

4-c) Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}, M^k = D^k + kN$.

4-d) En déduire $M^k$ pour tout entier naturel $k$.

**Deuxième partie :**

Dans toute cette partie, on considère un entier $n \geq 1$ et on note $D$ l'ensemble des nombres complexes de module inférieur ou égal à 1 et $z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}$ les racines $(n+1)$-ièmes de l'unité.

1) Montrer que pour tout $k = 1, \ldots, n,\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\frac{\mathrm{kj}}{\mathrm{n+1}}} = 0$

2) Montrer que pour tout $k = 1, \ldots, n,\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} z_j^k = 0.$

3) Soients $u_1, \ldots, u_{n+1},\ n+1$ réels tels que :

$$\forall\, j = 1, \ldots, n+1,\ u_j \leq 1 \text{ et } \sum_{j=1}^{n+1} u_j = n+1.$$

Montrer que pour tout $j = 1, \ldots, n+1,\ u_j = 1$.

4) Soients $v_1, \ldots, v_{n+1},\ n+1$ nombres complexes tels que :

$$\forall\, j = 1, \ldots, n+1,\ |v_j| \leq 1 \text{ et } \sum_{j=1}^{n+1} v_j = n+1.$$

Montrer que pour tout $j = 1, \ldots, n+1,\ v_j = 1$.

5) On considère maintenant un polynôme $P$ à coefficients complexes de degré $n$ et tel que

$$\forall\ z \in \mathbf{C},\ P(z) = z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \text{ et } \forall\ z \in D,\ P(z) \in D.$$

5-a) Montrer que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} z_j P(z_j) = n + 1.$

5-b) En déduire que pour tout $j = 1, \ldots, n+1,\ z_j P(z_j) = 1.$

5-c) Montrer que pour tout $z \in \mathbf{C},\ P(z) = z^n.$

**Troisième partie :**

Dans toute cette partie, $a$ est un réel strictement positif fixé. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on pose

$$f_a(x) = \frac{a(1+a^2)}{1+x^2}$$

1) Donner le tableau des variations de $f_a$ et tracer sa courbe représentative.

2) 2-a) Résoudre dans $\mathbf{R}$, l'équation $f_a(x) = x$.

2-b) Résoudre dans $\mathbf{R}$, l'équation $f_a(x) = a$.

3) Dans cette question, on prend $a = 1$.

3-a) Calculer $f_1 \circ f_1(x)$.

3-b) Montrer que l'équation $f_1 \circ f_1(x) = x$ équivaut à une équation de la forme $P_1(x) = 0$ où $P_1$ est un polynôme de degré 5 que l'on calculera.

3-c) Vérifier que 1 est racine multiple de l'équation $P_1(x) = 0$. Quel est son ordre de multiplicité ?

3-d) Résoudre dans $\mathbf{R}$, l'équation $f_1 \circ f_1(x) = x$.

Dans toute la suite, on considère une suite récurrente $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 \geq 0$ donné et $u_{n+1} = f_a(u_n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. On posera enfin pour tout $n \in \mathbf{N},\ v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

4) 4-a) Montrer que les deux suites $(v_n)$ et $(w_n)$ sont monotones et que l'une de ces deux suites est croissante et l'autre est décroissante.

4-b) Montrer que tous les termes de l'une de ces deux suites sont supérieurs ou égaux à $a$ et que tous les termes de l'autre suite sont inférieurs ou égaux à $a$.

4-c) Montrer que les deux suites $(v_n)$ et $(w_n)$ sont convergentes.

5) Dans cette question, on prend $a = 1$.

5-a) Montrer que les deux suites $(v_n)$ et $(w_n)$ convergent vers une même limite que l'on précisera. (On pourra utiliser les questions 3 et 4).

5-b) Que peut-on en déduire pour la suite $(u_n)$ ?

6) Dans cette question, on suppose que $a > 1$.

6-a) Calculer $f_a'(a)$.

6-b) En déduire qu'il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall\ x \in [a-\delta, a+\delta], |f_a'(x)| \geq 1.$$

6-c) On suppose, dans cette partie de la question, que la suite $(u_n)$ converge. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall\ n \geq n_0, u_n \in [a-\delta, a+\delta] \text{ et } |u_n - a| \geq |u_{n_0} - a|.$$

6-d) En déduire que la suite $(u_n)$ converge vers $a$ si et seulement si $u_0 = a$.

7) On suppose maintenant que $0 < a < 1$.

7-a) Calculer $f_a \circ f_a(x)$.

7-b) Montrer que l'équation $f_a \circ f_a(x) = x$ équivaut à une équation de la forme $P_a(x) = 0$ où $P_a$ est un polynôme de degré 5 que l'on calculera.

7-c) Montrer qu'il existe un polynôme $Q_a$ de degré 4 tel que $P_a(x) = (x-a)Q_a(x)$.

7-d) Etudier les variations de $Q_a(x)$ pour $x \geq a$ et montrer que l'équation $f_a \circ f_a(x) = x$ possède une seule racine réelle supérieure ou égale à $a$.

7-e) Montrer, en utilisant les résultats de la question 4, que la suite $(u_n)$ converge vers $a$.