EXERCICE 1

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $X_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Partie A :

1. Montrer que la matrice P est inversible et déterminer son inverse.
2. Déterminer D^k pour tout entier naturel k.
3. Montrer que $A = PDP^{-1}$ et que pour tout entier naturel k, $A^k = PD^kP^{-1}$.
4. Déterminer $P^{-1}X_1$ et en déduire par récurrence que pour tout entier naturel k : $A^kX_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k \\ \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k \\ 1 - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k \end{pmatrix}$.

Partie B :

On étudie le comportement d'un consommateur M à partir d'une semaine donnée (appelée " semaine 1 ").
Ce consommateur choisit chaque semaine chez le pâtissier un dessert parmi les trois desserts A , B et C.
On considère en outre que :

- Si M a choisi le dessert A la semaine n , alors la semaine $n + 1$ il choisit :
  le dessert A avec une probabilité de 1/3 ou le dessert C avec une probabilité de 2/3 .
- Si M a choisi le dessert B la semaine n , alors la semaine $n + 1$ il choisit :
  le dessert A avec une probabilité de 1/3 ou le dessert B avec une probabilité de 2/3.
- Si M a choisi le dessert C la semaine n , il reprend le dessert C la semaine $n + 1$.
- Le consommateur M choisit de manière équiprobable son dessert la première semaine.

On notera pour tout entier naturel non nul n :

A_n l'événement : " M a choisi le dessert A la n - ième semaine " .
B_n l'événement : " M a choisi le dessert B la n - ième semaine " . On note aussi : $U_n = \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{pmatrix}$.
C_n l'événement : " M a choisi le dessert C la n - ième semaine " .

1. Donner $P(A_1)$, $P(B_1)$, $P(C_1)$, ainsi que les probabilités $P_{A_n}(A_{n+1})$, $P_{A_n}(B_{n+1})$, $P_{A_n}(C_{n+1})$
   $P_{B_n}(A_{n+1})$, $P_{B_n}(B_{n+1})$, $P_{B_n}(C_{n+1})$, $P_{C_n}(A_{n+1})$, $P_{C_n}(B_{n+1})$, $P_{C_n}(C_{n+1})$.
2. A l'aide de la formule des probabilités totales , justifier avec soin que $P(A_{n+1}) = \frac{1}{3}P(A_n) + \frac{1}{3}P(B_n)$.
   Donner de même des relations exprimant $P(B_{n+1})$ et $P(C_{n+1})$ en fonction de $P(A_n)$, $P(B_n)$, $P(C_n)$.
3. (a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n : $U_{n+1} = AU_n$.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n : $U_n = A^{n-1}X_1$.
4. En déduire, en fonction de n , la probabilité $P(A_n)$ ainsi que sa limite quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2

On considère la fonction g définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par $g(x) = x^2 + \ln x - 2$. On donne $\ln 2 \approx 0{,}7$.

1. (a) Calculer la dérivée g' puis étudier les variations de g .

   (b) Calculer les limites de g en 0 à droite et en $+\infty$.

   (c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ d'inconnue $x > 0$ admet une unique solution que l'on notera α . Justifier que $1 < \alpha < 2$.

   (d) Donner le signe de $g(x)$ en établissant les cas $x < \alpha$, $x = \alpha$, $x > \alpha$.

   (e) Tracer dans un repère orthonormé l'allure de la courbe représentative de g , en faisant apparaître les points de cette courbe d'abscisse $x = 1$, $x = \alpha$, $x = 2$.

2. (a) Montrer grâce à une intégration par parties que : $\int_1^\alpha \ln x\,dx = \alpha \ln \alpha - \alpha + 1$.

   (b) En utilisant la relation vérifiée par α , montrer que : $\int_1^\alpha g(x)dx = \dfrac{8 - 2\alpha^3}{3} - \alpha$.

   (c) Hachurer la zone du plan correspondant à cette intégrale sur le graphe de la question 1. (e) .

On définit maintenant une suite qui déterminera une valeur approchée du réel α obtenu en question 1.(c) .
A cet effet on considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et pour tout entier naturel } n : \quad u_{n+1} = \sqrt{2 - \ln(u_n)} \; .$$

3. (a) On note pour tout réel $x \in [\,1\,;2\,]$, $h(x) = \sqrt{2 - \ln x}$. Vérifier que h est dérivable sur $[\,1\,;2\,]$ et que pour tout réel $x \in [\,1\,;2\,]$, $h'(x) = -\dfrac{1}{2x\,h(x)}$ puis donner le tableau des variations de h avec les valeurs aux bornes .

   Justifier que $\sqrt{2} \leq 2$, que $\sqrt{2 - \ln 2} \geq 1$ et que pour tout $x \in [\,1\,;2\,]$, $h(x) \in [\,1\,;2\,]$.

   (b) Montrer que pour tout entier naturel n : u_n existe et $u_n \in [\,1\,;2\,]$.

   (c) Montrer que pour tout réel $x \in [\,1\,;2\,]$, $|\,h'(x)\,| \leq \dfrac{1}{2}$.

   Vérifier que $h(\alpha) = \alpha$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\,u_{n+1} - \alpha\,| \leq \dfrac{1}{2}|\,u_n - \alpha\,|$.

   (d) Montrer que pour tout entier naturel n : $|\,u_n - \alpha\,| \leq (\frac{1}{2})^n |\,u_0 - \alpha\,|$.

   En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et que sa limite est le réel α .

EXERCICE 3

Une usine fabrique des ampoules, dont 50% proviennent d'une machine M_1, 30% proviennent d'une machine M_2 et 20% proviennent d'une machine M_3.

La probabilité qu'une ampoule fabriquée soit défectueuse est différente selon les machines :
Elle vaut $\frac{3}{100}$ pour M_1, $\frac{5}{100}$ pour M_2 et $\frac{15}{100}$ pour M_3.

Pour $k = 1, 2, 3$ on notera l'événement F_k : " l'ampoule qu'on examine a été fabriquée par M_k ".

Les fonctionnements des trois machines seront toujours supposés indépendants.

1. (a) Donner $P(F_3)$, probabilité qu'une ampoule choisie au hasard ait été fabriquée par M_3.
   (b) Montrer que la probabilité qu'une ampoule choisie au hasard soit défectueuse est $0{,}06$.
   (c) On suppose ici qu' une ampoule choisie au hasard s'est révélée défectueuse.
   Quelle est la probabilité que cette ampoule ait été fabriquée par M_3 ?

Dans toute la suite on note n un entier naturel non nul.

On suppose dans toute la suite qu'on examine un lot choisi au hasard de n ampoules fabriquées par cette usine.

On note X la variable aléatoire égale au nombre d'ampoules défectueuses dans ce lot.

2. Justifier que la variable X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   Préciser $X(\Omega)$ et exprimer la probabilité $P(X = k)$ pour $k \in X(\Omega)$.
   Quel est le nombre moyen de pièces défectueuses dans le lot ?

3. Dans cette question seulement on suppose que $n = 14100$ et on décide d'approcher la loi de X en utilisant une variable Z qui suit une loi normale de paramètres m et σ^2.
   (a) Justifier que $m = 846$ et $\sigma = \dfrac{141}{5}$.
   (b) A l'aide de cette approximation et sans tenir compte de la correction de continuité, calculer une valeur approchée de la probabilité que X prenne une valeur comprise entre 818 et 874 (on utilisera la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite).
   On donne les valeurs numériques : $\dfrac{140}{141} \approx 0{,}99$ et $\Phi(0{,}99) \approx 0{,}839$.

4. Dans cette dernière question on suppose que $n = 7$ et que les sept ampoules choisies sont sans défaut.
   On suppose également que le temps de fonctionnement d'une ampoule sans défaut suit une loi exponentielle de paramètre $0{,}2$. On branche ces 7 ampoules au même moment.
   On note T la variable aléatoire égale au temps pendant lequel les sept ampoules vont fonctionner.
   (a) Justifier que pour tout réel t positif, $P(T > t) = (e^{-0{,}2t})^7$.
   (b) En déduire que T suit une loi exponentielle dont on donnera le paramètre, puis donner l'espérance et la variance de T.