INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE DE L'INFORMATION

Concours d'élève ingénieur de l'ENSAI

Concours d'attaché statisticien de l'INSEE

MAI 2009

SPECIALITE ECONOMIE

Composition de mathématiques

Durée : 4 heures

Le sujet comprend 5 pages (y compris celle-ci).

Sans documents. L'usage des calculatrices est interdit.

Le sujet se compose de 3 exercices d'analyse indépendants, et d'un problème d'algèbre.

Exercice 1 On se propose d'étudier la fonction suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \ln(1+\sin^2(x))$$

1. Montrer que la fonction f est paire et périodique.
2. Donner le tableau de variations de f.
3. Donner un équivalent de f en 0.
4. Tracer la courbe représentative de f.
5. Montrer l'inégalité suivante : $\forall 0 \leq y \leq x,\ |f(x) - f(y)| \leq 2x(x-y)$. (on pourra utiliser après l'avoir redémontrée l'inégalité $|\sin(t)| \leq |t|$ pour tout t réel).
6. Montrer l'inégalité suivante : $\forall x \in \mathbb{R}+,\ 0 \leq f(x) \leq x$.
7. Soit $x_0 > 0$. Montrer que la suite définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ est monotone.
8. En déduire que la suite $(x_n,\ n \in \mathbb{N})$ est convergente et calculer sa limite.
9. On suppose $0 < x_0 < \exp(-1)$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \leq \frac{1}{2}(\frac{2}{e})^{(2^n)}$.

Exercice 2 Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, telle que

$$\int_0^1 f(x)dx = 0$$

On pose $a = \inf_{x\in[0,1]} f(x)$, $b = \sup_{x\in[0,1]} f(x)$.

1. Montrer que $a \leq 0$ et $b \geq 0$.
2. Montrer qu'il existe $x_a,\ x_b \in [0,1]$ tels que $f(x_a) = a,\ f(x_b) = b$.
3. En déduire l'existence de $c \in [0,1],\ f(c) = 0$.
4. Calculer $\int_0^1 (f(x) - a)(b - f(x))dx$ et en déduire l'inégalité
$$\int_0^1 f^2(x)dx \leq -ab$$
5. On pose $\forall t \in [0,1],\ \varphi(t) = \int_0^t f^2(x)dx + af(t)$. Déduire des questions précédentes l'existence d'un $d \in [0,1],\ \varphi(d) = 0$.
6. Application : soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur [0,1]. On pose $Y = f(X)$ (pour la fonction f considérée précédemment).
   (a) Calculer l'espérance de Y et sa variance.
   (b) Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Chebychev
   (c) Déduire des questions précédentes l'inégalité :
$$\forall t > 0, \qquad \mathbb{P}(|Y| \geq t) + \frac{ab}{t^2} \leq 0.$$

Exercice 3 1. Soit $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$. On définit la suite $(x_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$ par la récurrence suivante :

$$x_0 > 0, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{t}{x_n})$$

2. On admet que la suite est bien définie et convergente. Calculer sa limite.
3. On suppose toujours que $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ mais on définit la suite **complexe** $(z_n \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N})$ par la récurrence suivante :

$$z_0 \in \mathbb{C} - \{0\}, \qquad z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + \frac{t}{\overline{z_n}})$$

où $\overline{z_n}$ désigne le complexe conjugué de z_n.
En écrivant les nombres complexes sous leur forme polaire (*i.e. en fonction de leur module et de leur argument*), montrer que la suite est convergente dans $\mathbb{C}$ et trouver sa limite en fonction du point de départ.
4. Finalement, on suppose t complexe de partie imaginaire non nulle.
   (a) Montrer que si $z_0 \neq 0$, la suite (z_n) est bien définie.
   (b) Montrer que l'équation $z = \frac{1}{2}(z + \frac{t}{\bar{z}})$ n'admet pas de solution.
   (c) En déduire que la suite ne converge pas.

PROBLÈME

Dans ce problème, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est rapporté à sa base canonique. Les matrices considérées sont identifiées aux applications linéaires canoniquement associées, et sont donc à coefficients réels.

On se propose d'étudier les inverses généralisées de matrices. Si A est une matrice de dimension $n \times p$ *(n lignes et p colonnes)*, alors une inverse généralisée de A est une matrice B vérifiant

$$ABA = A$$

- Pour que cette écriture ait un sens, quel doit être la dimension de B ?

Dans la suite, on notera cette dimension $d_l \times d_c$.

-Partie A : des exemples-

1. On pose $A = \lambda I_n$, avec I_n la matrice identité de taille n et $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer suivant les valeurs de λ les inverses généralisées de A.
2. On pose
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont des inverses généralisées de A ?
$$B_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$B_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
3. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Trouver toutes les inverses généralisées de A.

-Partie B : un peu de théorie-

Dans toute cette partie, on admet l'existence d'une inverse généralisée B_0 de A.

1. On suppose dans cette question (et dans cette question seulement) que A est une matrice inversible. Montrer qu'alors il existe une unique inverse généralisée et la déterminer.
2. Soit N une matrice de même dimension que B_0 $(d_l \times d_c)$.
   (a) Rappeler la définition de l'image d'une matrice, du noyau d'une matrice.
   (b) Montrer que si $Im(A) \subset \ker(N)$, alors $B_0 + N$ est aussi une inverse généralisée de A.
   (c) Montrer qu'il en est de même si $Im(N) \subset \ker(A)$.
3. On note
$$\mathcal{S}_A = \{\text{matrices } B,\ ABA = A\}$$
Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}_A - B_0 = \{B - B_0,\ B \in \mathcal{S}\}$ est un espace vectoriel.
4. On suppose que l'équation $AX = Y$ admet une solution X_s.
   (a) Montrer qu'alors $X_0 = B_0 Y$ est également solution de l'équation.
   (b) En déduire que l'équation $AX = Y$ admet une solution si et seulement si $AB_0Y = Y$.

-Partie C : un peu de diagonalisation-

1. Soit M la matrice carrée diagonale suivante : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Trouver toutes les inverses généralisées de M.
2. Montrer que toute matrice carrée diagonale admet une inverse généralisée.
3. Soit D une matrice carrée diagonale de taille n, B une inverse généralisée de D.
   (a) Rappeler la définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre d'une matrice carrée.
   (b) On suppose que X est un vecteur propre de D associé à la valeur propre λ **non nulle**. Montrer que X est un vecteur propre de DB. Quelle est la valeur propre associée ?
4. Donner la forme générale des inverses généralisées d'une matrice carrée diagonale.
5. Soit B_0 une inverse généralisée de D matrice carrée diagonale de taille n.
   (a) Rappeler la définition du rang d'une matrice.
   (b) A quoi correspond le rang d'une matrice carrée diagonale ?
   (c) Calculer la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_D - B_0 = \{B - B_0,\ DBD = D\}$ en fonction du rang de D.
6. Rappeler la définition d'une matrice diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$.
7. Déduire de ce qui précède que toute matrice A diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$ admet une inverse généralisée et donner la forme générale des inverses généralisées de A en fonction des valeurs propres de A et de la matrice de passage.

-Partie D : application-

Soit A la matrice carrée suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les valeurs propres de A.
2. A est elle inversible ? diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$?
3. Diagonaliser A.
4. Déterminer l'ensemble des inverses généralisées de A.
5. L'équation

   $$AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   admet-elle une solution ?