RAPPORT

COMMENTAIRES GENERAUX

Rappelons quelques faits importants :

- Une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire afin d'en comprendre la problématique et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et/ou les questions) qui lui sont les plus accessibles.
- Une copie soignée est appréciée.
- Une bonne connaissance des notions et résultats fondamentaux du cours est un pré-requis indispensable à la résolution correcte de nombreuses questions d'un sujet de mathématiques.
- Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel, des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.
- Vérifier la vraissemblance et la cohérence des résultats obtenus par rapport aux résultats proposés.
- L'aménagement des calculs et des raisonnements afin d'obtenir impérativement les résultats proposés est fortement sanctionné.

Désormais plus d'un tiers des candidats aborde les questions informatiques et, généralement, elles sont traitées correctement. Rappelons que ces questions sont assez fortement valorisées au sein du barême de l'épreuve.

Avec une moyenne de 10,2 et un écart-type de 4,9, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

COMMENTAIRES PARTICULIERS

Exercice 1

1. (a) Pour la première égalité, peu de candidats reconnaissent une somme de termes en progression géométrique ce qui n'empêche pas la majorité des candidats de fournir une justification correcte.
   Pour l'encadrement suivant, si de nombreux candidats ont l'intuition qu'il suffit de montrer que :

$$\forall t \in [0,1[, \quad \frac{(1-t)t^n}{1-t^n} \leqslant t^n,$$

quasiment aucun n'est capable de le justifier alors qu'un simple produit en croix suffisait.

Parmi les candidats ayant considéré l'intégrale impropre $\int_0^1 \frac{(1-t)t^n}{1-t^n}dt$, bien peu pensent à justifier son existence.

(b) Les candidats doivent revoir les hypothèses pour effectuer un changement de variable et surtout la technique opératoire de changement de variable : bornes du nouvel intervalle, le *du*, etc.

2. (a) La moitié des candidats justifient correctement l'existence et la valeur de la limite, souvent via un équivalent ou un taux d'accroissement. Le cas particulier $k = 1$ est presque toujours oublié.
   (b) Ceci reste une question délicate pour les candidats. L'oubli des différents critères à vérifier est récurrent : continuité, positivité, comparaison en 0 (traité par la majorité des candidats) et en 1 (oublié par l'immense majorité des candidats).
   (c) Si un nombre substantiel de candidats est capable d'énoncer correctement l'inégalité de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 1, seule une infime minorité est capable de justifier l'existence d'un majorant à la fonction $|f''|$ sur l'intervalle $]-\infty,0]$ ou simplement de proposer un majorant quelconque (par exemple 5 à l'aide de l'inégalité triangulaire ou d'un encadrement simple de e^x et e^{2x}).
3. (a) Cette question s'est avérée particulièrement discriminante car elle nécessitait d'appliquer correctement l'encadrement précédent puis l'inégalité triangulaire en n'omettant pas la justification de la convergence des intégrales considérées.
   (b) Peu de candidats sont en mesure de deviner un équivalent de v_n et sa justification laisse souvent perplexe le correcteur. En effet, l'immense majorité des candidats pense que $u_n \sim v_n$ dès que $\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Exercice 2

1. (a) Question correctement traitée par l'immense majorité des candidats. Il ne faut oublier de justifier que $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ lorsque $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Question correctement traitée par l'immense majorité des candidats.
   (c) La plupart des candidats est en mesure de justifier la diagonalisabilité et la dimension de chaque espace propre bien qu'il reste encore des erreurs relativement courantes comme celle-ci par exemple : «puisque An est triangulaire, elle est diagonalisable».
   (d) La justification de la formule λ = -4 deg(P) fut délicate pour de nombreux candidats et seule une infime partie d'entre eux fut en mesure d'argumenter pour la dernière affirmation de la question.
2. (a) Un nombre important de candidats fait des conclusions importantes. Par exemple,

ils pensent que : $(f(H_n))' = f(H'_n)$ ou bien que : $(f(H_n))' = H'_n \times f'(H_n)$ (confusion car f n'est pas une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles)! Peu de candidats ont abordé les deux autres relations mais lorsque cela fut le cas, un argumentaire correct fut proposé.

(b) La justification de $H_0 = 1$ et $H_1 = X$ fut particulièrement peu habile pour beaucoup de candidats. Il suffisait d'appliquer la question 1.d en pensant à mentionner le degré. Pour le calcul de H_2 et H_3, les candidats ayant abordé la question, l'ont traitée correctement.

(c) Plus de la moitié des candidats produisent un programme correct (mais comportant plusieurs erreurs de syntaxe) et un quart d'entre eux obtiennent la note maximale à cette question.

3. (a) Beaucoup de candidats ont des difficultés à dériver la fonction $x \mapsto \ln|x|$ alors qu'il est connu que cette fonction est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$. Un nombre important de candidats propose comme dérivée $\frac{1}{|x|}$ puis fait disparaître opportunément la valeur absolue (ce qui les arrange ultérieurement). L'honnêteté intellectuelle élémentaire voudrait que le candidat mentionne par exemple : «les calculs suivants sont menés sous l'hypothèse que x soit positif». Bien entendu, le correcteur sanctionne cette malhonnêteté.

(b) Question abordée par très peu de candidats. Lorsqu'elle l'est, seule l'implication directe est traitée.

(c) Question abordée par très peu de candidats.

Problème

I.1 (a) Plus de la moitié des candidats produisent un programme correct (mais comportant plusieurs erreurs de syntaxe) et un quart d'entre eux obtiennent la note maximale à cette question.

(b) La transformation de $u_n - u_{n+1}$ en $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}$ pose souci à un nombre non négligeable de candidats.

L'obtention de l'équivalent est alors, pour une très large majorité de candidats, un exercice de haute volée consistant soit à sommer des équivalents, soit à fournir un développement limité erroné à l'ordre 2 de $\ln(1 + x)$ en 0, soit à sommer un équivalent et un développement limité. Dans tous les cas, la rigueur est la grande absente du raisonnement.

Pour la nature de la série, l'argumentaire est correctement mené par une large partie des candidats même si la positivité est encore trop souvent oubliée. Seule une petite fraction de ceux-ci voit le lien entre la convergence de la série $\sum (u_n - u_n+1)$ et celui de la suite (u_n).

(c) Il s'agit d'une simple question de cours correctement traitée même si certains essaient de redémontrer la convergence par divers arguments (théorème de convergence monotone en général).

2. (a) La plupart des candidats répond correctement à la question portant sur la fonction de répartition mais souvent l'un des points à vérifier est oublié : monotonie, positivité, limites. Les trois quarts des candidats justifient convenablement la fonction de répartition et un quart l'intégralité de la question.

(b) Question correctement traitée par la moitié des candidats. Néanmoins une erreur fréquente est commise. Lors du calcul de la probabilité $P(\exp(-Z) \leqslant x)$, peu de candidats distinguent les cas $x \leqslant 0$ » et « $x > 0$ et la majeure partie d'entre eux travaille sur la probabilité $P(Z \geqslant -\ln(x))$ sans jamais mentionner que x est strictement positif. Bien entendu, cet oubli fut sanctionné.

(c) Assez peu de candidats sont en mesure de justifier correctement la continuité de $x \mapsto \left|(\ln(x))^k e^{-x}\right|$ ainsi qu'une domination correcte soit en 0, soit en $+\infty$.

(d) Question correctement traitée par un nombre important de candidats même si, de nouveau, le mode opératoire du changement de variable laisse à désirer pour la moitié des candidats.

II.1 (a) La probabilité $P(C_n)$ est correctement calculée mais bien peu justifiée (événements élémentaires, incompatibles, indépendants). Un nombre significatif de candidats ne fait pas le lien entre les événements ($Y_2>n$) et C_n ce qui interdit la détermination de la loi de Y_2.

(b) Seule la moitié des candidats sont en mesure de justifier la première formule. L'interprétation en langage courant de l'événement $([Y_3 = n + k] \cap [Y_2 = k])$ s'avère délicate par les candidats ce qui les empêche d'en déduire la valeur de la probabilité correspondante. La loi de Y_3-Y_2 n'est traitée que par les meilleurs candidats.

2. (a) L'objectif de cette question est de permettre au candidat de se familiariser avec la signification des variables Y_i et Y_{i+1}-Y_i. En particulier, une phrase explicative en français s'avérait suffisante pour convaincre le correcteur des égalités mentionnées. Malheureusement, seule une petite partie des candidats est en mesure de le faire.

(b) Une simple interprétation en langage courant de cette probabilité conditionnelle suffisait pour obtenir la formule et contenter le correcteur. Néanmoins ce fut ardu pour les candidats car une moitié d'entre eux n'a pas traité la question ou a donné un argumentaire complètement faux et un quart des candidats a justifié correctement la formule attendue.

(c) Si une partie des candidats a été en mesure de donner la bonne réponse : «loi géométrique de paramètre $\frac{i}{r}$», il fallait encore travailler un peu puisqu'il s'agissait de prouver la formule :

$$\forall n \geqslant 1, \quad P(Y_{i+1} - Y_i = n) = \left(\frac{i}{r}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{i}{r}\right).$$

Peu de candidats y sont parvenus.

3 (a) Il était attendu de la part des candidats le rappel du caractère linéaire de l'espérance ainsi que l'indépendance des variables pour additionner les variances. Dans le cas contraire, une fraction importante de la note a été retirée.

(b) Question traitée par peu de candidats.

III.1 (a) Seul un quart des candidats fut en mesure de calculer l'une des deux probabilités. Presque aucune justification ne fut apportée (événements élémentaires, incompatibles, indépendants).

(b) Un quart des candidats justifie la première égalité, une infime minorité d'entre eux énonce plus ou moins correctement la formule du crible de Poincaré et une petite partie des candidats propose la loi de X_r.

2. Un nombre extrêmement faible aborde les questions correspondantes hormis la 2.b qui est traitée correctement par récurrence par plus d'un quart des candidats.

3. Un nombre extrêmement faible aborde les questions correspondantes.