

1

# Mathématiques

Option Scientifique

■ Mercredi 20 avril 2011 de 8h00 à 12h00

**Durée : 4 heures**

*Candidats bénéficiant de la mesure "Tiers-temps" :  
8h00 – 13h20*

Aucun document n'est autorisé.  
Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

L'énoncé comporte 8 pages.

*Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.*

Tournez la page s.v.p.

## Ecricome Option Scientifique sujet principal

**EXERCICE 1.**

Soit  $n$  un entier naturel non nul, on considère  $E = \mathbb{R}_n[X]$  l'espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ .

Pour tout entier naturel  $j$ , on note  $P^{(j)}$  la dérivée  $j$ -ième de  $P$ .

On définit la famille de polynômes  $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$  par :

$$P_0(X) = 1 \text{ et } \forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad P_k(X) = \frac{X(X-k)^{k-1}}{k!}.$$

1. (a) Prouver que la famille  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  est une base de  $E$ .
- (b) Montrer que pour tout entier  $k$  appartenant à  $\{1, \dots, n\}$ , on a :

$$P'_k(X+1) = P_{k-1}(X)$$

puis, pour tous les entiers  $k, j$  vérifiant  $1 \leq j \leq k \leq n$ , donner une relation entre  $P_k^{(j)}(X)$  et  $P_{k-j}(X-j)$ .

- (c) Soit  $P \in E$ . justifier l'existence d'un  $(n+1)$ -uplet  $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  tel que :

$$P = a_0 P_0 + a_1 P_1 + \dots + a_n P_n = \sum_{k=0}^n a_k P_k$$

puis établir que :

$$\forall j \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad P^{(j)}(j) = a_j.$$

Ainsi on a établi la relation :

$$\forall P \in E, \quad P = \sum_{l=0}^n P^{(l)}(l) P_l.$$

2. On considère l'application  $u$  définie sur  $E$  par :

$$\forall P \in E, \quad u(P)(X) = P'(X+1).$$

- (a) Etablir que  $u$  est un endomorphisme de  $E$ .
- (b) Ecrire la matrice  $A$  de l'endomorphisme  $u$  dans la base  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  de  $E$ .

- (c) Déterminer le rang de  $A$  ainsi que ses valeurs propres.
- (d) La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ? (Une réponse argumentée est attendue)
3. On définit sur  $E \times E$  l'application  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  par :

$$\forall (P, Q) \in E \times E. \quad \langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(k)Q^{(k)}(k).$$

- (a) Démontrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  définit un produit scalaire sur  $E$ .
- (b) Justifier que la famille  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  est une base orthonormale de  $E$ .

## EXERCICE 2.

On considère :

- la fonction  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*. \quad \varphi(t) = \frac{\exp(t) - 1}{t} - t \left( \exp\left(\frac{1}{t}\right) - 1 \right).$$

- la fonction  $\psi$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \psi(t) = t - \frac{1}{t} - \ln(t).$$

- $U$  l'ouvert de  $\mathbb{R}^2$  défini par :

$$U = ]0, +\infty[^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ et } y > 0\}.$$

- $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie sur l'ouvert  $U$  et à valeurs réelles par :

$$\forall (x, y) \in U, \quad f(x, y) = x^y - y^x = \exp(y \ln(x)) - \exp(x \ln(y)).$$

où  $\exp(s)$  désigne l'exponentielle du réel  $s$  c'est-à-dire que  $\exp(s) = e^s$ . On admet que  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $U$ .

L'objectif de cet exercice est de prouver que la fonction  $f$  n'admet aucun extremum sur  $U$ .

- Etudier les variations de  $\psi$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , calculer  $\psi(1)$  et préciser le signe de  $\psi$ .

Tournez la page s.v.p.

2. Prouver la convergence de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{n-1}{n!}$  et calculer sa somme.
3. Soit  $t \in \mathbb{R}_+^*$ . Exprimer la somme  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!}$  en fonction de  $\varphi(t)$  et  $\ln(t)$ . On admettra la convergence de cette série.
4. Justifier que :
 
$$\forall t \in ]0, 1[. \quad \varphi(t) < \ln(t), \quad \forall t \in ]1, +\infty[. \quad \varphi(t) > \ln(t).$$
5. Soit  $(x, y) \in U$ . Montrer que  $(x, y)$  est un point critique de  $f$  si et seulement si :
 
$$\begin{cases} x > 1, & y > 1; \\ \ln(x) \ln(y) = 1; \\ y^{x-1} = x^{y-1} \ln(x). \end{cases}$$
6. Soit  $(x, y) \in U$  un point critique de  $f$ . Justifier l'existence d'un réel  $t \in \mathbb{R}_+^*$  tel que :
 
$$\begin{cases} x = \exp(t), & y = \exp\left(\frac{1}{t}\right); \\ \varphi(t) = \ln(t). \end{cases}$$
7. Prouver que  $(e, e)$  est l'unique point critique de  $f$ .
8. En comparant les signes des fonctions  $t \mapsto f(e, e+t)$  et  $t \mapsto f(e+t, e)$ , justifier que  $f$  n'admet aucun extremum sur  $U$ .

## PROBLEME

La partie **I** consiste à justifier que les variables  $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$  et  $Z_n = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{i}$  possèdent la même loi lorsque  $(X_1, \dots, X_n)$  est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la même loi exponentielle de paramètre 1.

La partie **II** a pour objectif d'établir que, pour chaque variable aléatoire  $X$  possédant une densité  $f$  avec  $f$  continue sur  $\mathbb{R}_+$  et  $f$  nulle sur  $\mathbb{R}_-$ , il n'existe aucune variable aléatoire  $Y$  à densité dérivable  $g$  sur  $\mathbb{R}^*$ , nulle sur  $\mathbb{R}_-$  et vérifiant  $g-g' = f$ .

La partie **III** consistera à étudier les valeurs propres et vecteurs propres de l'application

linéaire introduite à la partie II.

Les parties I, II et III sont largement indépendantes.

## PARTIE I. Etude des variables $Y_n$ et $Z_n$ .

Toutes les variables aléatoires considérées ici sont définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

Soit  $X$  une variable aléatoire, rappelons que :

- $F_X$  désigne sa fonction de répartition définie par :  $\forall t \in \mathbb{R}. F_X(t) = P(X \leq t)$ .
- $X$  suit la loi exponentielle de paramètre  $a \in ]0, +\infty[$  si et seulement si sa fonction de répartition est définie par :

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0; \\ 1 - \exp(-at) & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

où  $\exp(y)$  désigne l'exponentielle du réel  $y$  c'est-à-dire que :  $\exp(y) = e^y$ .

On considère une suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la même loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note  $Y_n$  et  $Z_n$  les deux variables aléatoires définies respectivement par :

$$Y_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n) = \max_{1 \leq i \leq n} X_i.$$

$$Z_n = \frac{X_1}{1} + \frac{X_2}{2} + \dots + \frac{X_n}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{i}.$$

où  $\max(X_1, \dots, X_n)$  désigne le maximum des valeurs de  $X_1, \dots, X_n$ .

Pour finir, on désigne par  $f_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f_n(t) = 0 & \text{si } t < 0; \\ f_n(t) = n \cdot \exp(-t) (1 - \exp(-t))^{n-1} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

1. On considère un tableau  $X$  de nombres réels de taille 2011 (c'est-à-dire « $X = \text{array}[1 \dots 2011]$  of real») préalablement rempli.

(a) Ecrire un programme en Pascal calculant et affichant les réels :

$$\max(X[1], X[2]) \quad \text{et} \quad \max(X[1], X[2], X[3]).$$

Tournez la page s.v.p.

(b) Ecrire un programme en Pascal calculant et affichant le réel :

$$\max (X [1] . X [2] , \dots X [2011]) = \max_{1 \leq i \leq 2011} (X [i]) .$$

2. (a) Pour tout réel  $t$ , exprimer le réel  $F_{Y_n}(t)$  à l'aide des réels  $F_{X_1}(t), \dots, F_{X_n}(t)$ .
- (b) Pour tout réel  $t$ , donner alors l'expression de  $F_{Y_n}(t)$  en fonction de  $n$  et  $t$  en distinguant le cas  $t < 0$  et le cas  $t \geq 0$ .
- (c) Vérifier alors que la fonction  $f_n$  est une densité de probabilité de la variable aléatoire  $Y_n$ .
3. (a) Préciser la fonction de répartition de la variable aléatoire  $\frac{X_{n+1}}{n+1}$ .
- (b) Démontrer que  $\frac{X_{n+1}}{n+1}$  est une variable aléatoire à densité et proposer une densité  $d_{n+1}$ .
4. Pour tout réel  $x$ , vérifier que :  $\int_0^x n \cdot \exp(nt) (1 - \exp(-t))^{n-1} dt = (\exp(x) - 1)^n$ .
5. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $Z_n$  est une variable aléatoire à densité dont  $f_n$  est une densité. **Indication** : Pour l'hérédité, on remarquera que  $Z_{n+1} = Z_n + \frac{X_{n+1}}{n+1}$ .

## PARTIE II. Existence et unicité de la solution d'une équation différentielle.

On désigne par  $E$  l'ensemble des fonctions  $f$  continues de  $[0, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$  telles que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} |f(t)| dt$  converge. On admet que  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Pour toute fonction  $f$  appartenant à  $E$ , on considère l'équation différentielle

$$(\mathcal{D}_f) : y - y' = f$$

dont l'inconnue est la fonction  $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  qui est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$ . On fixe dans cette partie une fonction  $f$  appartenant à  $E$ . Pour tout réel positif  $x$ , on note :

$$k_f(x) = \exp(x) \int_x^{+\infty} \exp(-t) f(t) dt.$$

1. Soient  $\varphi, \psi$  deux fonctions appartenant à  $E$ , dérivables sur  $\mathbb{R}_+$  et vérifiant l'équation  $(\mathcal{D}_f)$ . On introduit la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad h(x) = (\varphi(x) - \psi(x)) \exp(-x)$$

- (a) Prouver que la fonction  $h$  est constante sur  $\mathbb{R}_+$ .  
 (b) En utilisant le fait que la fonction  $\varphi - \psi$  appartient à  $E$ , montrer que  $\varphi = \psi$ .

Nous avons ainsi établi qu'il existe au plus une solution dans  $E$  à l'équation  $(\mathcal{D}_f)$  lorsque  $f \in E$ .

2. Pour tout réel positif  $x$ , justifier la convergence de l'intégrale  $\int_x^{+\infty} \exp(-t) f(t) dt$ .

3. Etablir que la fonction  $k_f : x \mapsto \exp(x) \int_x^{+\infty} \exp(-t) f(t) dt$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad k_f(x) - k'_f(x) = f(x).$$

4. On suppose uniquement dans cette question que  $f$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$  c'est-à-dire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) \geq 0.$$

- (a) Vérifier les relations suivantes :

$$(\alpha) : \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq k_f(x) \leq \int_x^{+\infty} f(t) dt,$$

$$(\beta) : \forall A \in \mathbb{R}_+, \quad \int_0^A k_f(x) dx = k_f(A) - k_f(0) + \int_0^A f(x) dx$$

- (b) Prouver que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} k_f(x) dx$  converge et que :

$$\int_0^{+\infty} k_f(x) dx = \int_0^{+\infty} (1 - \exp(-x)) f(x) dx.$$

Tournez la page s.v.p.

5. On revient au cas général où  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  prend des valeurs non nécessairement positives.

Montrer que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} |k_f(x)| dx$  converge.

6. Soit  $X$  une variable aléatoire possédant une densité  $f$  avec  $f$  continue sur  $\mathbb{R}_+$  et  $f$  nulle sur  $\mathbb{R}_-^*$ .

Justifier qu'il n'existe aucune densité  $g$  dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ , nulle sur  $\mathbb{R}_-^*$  et vérifiant  $g - g' = f$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

### PARTIE III. Etude de l'application $f \mapsto k_f$ .

A la partie II, on a établi que si  $f$  appartient à  $E$ , il existe une unique fonction

$$k_f : x \mapsto \exp(x) \int_x^{+\infty} \exp(-t) f(t) dt$$

appartenant à  $E$  telle que :

$$k_f - k'_f = f.$$

On considère alors l'application  $\varphi$  définie sur  $E$  par :

$$\forall f \in E. \quad \varphi(f) = k_f.$$

1. Etablir que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $E$ .

**Définition :** On dit que le réel  $\lambda$  est valeur propre de  $\varphi$  s'il existe une fonction  $f$  de  $E$  non identiquement nulle telle que  $\varphi(f) = \lambda f$ . On dit que  $f$  est un vecteur propre de  $\varphi$  associé à la valeur propre  $\lambda$  et on appelle sous-espace propre de  $\varphi$  associé à  $\lambda$  l'espace vectoriel

$$E_\lambda(\varphi) = \{f \in E \text{ telle que } \varphi(f) = \lambda f\}$$

La suite de cette partie est consacrée à la détermination des valeurs propres et des vecteurs propres de  $\varphi$ .

2. Pour tout réel  $a > 0$ , on considère la fonction  $f_a$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_a(x) = \exp(-ax).$$

Vérifier que  $f_a$  appartient à  $E$ , que  $f_a$  est un vecteur propre de  $\varphi$  et préciser la valeur propre associée.

3. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $\varphi$  et  $f \in E$  un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$ .
- (a) Montrer que  $\lambda$  est nécessairement non nul.
  - (b) Etablir que  $f$  est dérivable et vérifie l'équation différentielle :  $f' = \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) f$ .
  - (c) Pour tout réel positif  $x$ , donner l'expression de  $f(x)$  en fonction de  $\lambda$ ,  $x$  et d'une certaine constante.
  - (d) Montrer que  $\lambda \in ]0, 1[$ .
4. Préciser l'ensemble  $\text{Sp}(\varphi)$  des valeurs propres de  $\varphi$  et, pour chaque valeur propre  $\lambda$  de  $\varphi$ , proposer une base de l'espace propre  $E_\lambda(\varphi)$ .

