

SUJET

EXERCICE 1.

Soient $x \in \mathbb{R}_+$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$, on pose :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x + e^t}, \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x + e^t)^2}, \quad I_a = \int_0^{+\infty} e^{-at} dt.$$

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier que l'intégrale I_a converge et donner sa valeur.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Justifier que l'intégrale $f(x)$ converge.

Dans la suite de l'exercice, on admettra que l'intégrale $g(x)$ converge.

2. Etablir que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad 2\sqrt{xe^t} \leq x + e^t$ puis que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

3. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$ tels que $x < y$. Etablir que : $0 < f(x) - f(y) \leq \frac{y-x}{2}$.
4. Montrer que f réalise une bijection continue strictement décroissante de \mathbb{R}_+ sur $]0, 1]$.
5. Prouver que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur \mathbb{R}_+ . On note α cette solution. Justifier que $\alpha \in]0, 1]$.
6. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par : $u_0 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\alpha - u_n| \leq \frac{1}{2^n}$. En déduire la limite de $(u_n)_{n \geq 0}$.

(b) On suppose qu'une fonction ECRICOME est déjà écrite en Turbo-Pascal qui à un réel x donné renvoie le réel $f(x)$.

A l'aide de la fonction ECRICOME, écrire une fonction (ou procédure) SUITE en Turbo-Pascal qui, à un réel $\varepsilon > 0$ fourni par l'utilisateur, calcule le premier entier N tel que $\frac{1}{2^N} \leq \varepsilon$ et renvoie la valeur de u_N correspondante.

7. Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x + h \in \mathbb{R}_+^*$. Démontrer que :

$$|f(x+h) - f(x) + hg(x)| \leq \frac{h^2}{3}.$$

Justifier que f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = -g(x).$$

8. On considère la fonction T définie sur \mathbb{R}_+^* par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad T(x) = xf(x)$. Justifier que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad T'(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{puis que : } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad T(x) = \ln(1+x).$$

EXERCICE 2.

Pour tout entier naturel n non nul, on note :

- $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels ;
- I_n la matrice identité de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et 0_n la matrice nulle de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Une matrice $W \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est dite nilpotente s'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $W^q = 0_n$.

On admettra que si U, V sont deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ commutent alors :

- U^k et V^q commutent pour tous entiers k et q ;
- U^{-1} commute avec V lorsque U est inversible.

1. Deux résultats préliminaires.

- (a) Soit $U \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $U^q = 0_n$.

Prouver que $I_n - U$ est inversible et que $(I_n - U)^{-1} = \sum_{k=0}^{q-1} U^k$.

- (b) Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A(A - I_n) = 0_n$. On désigne par f l'endomorphisme de \mathbb{R}^n dont la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^n est A .

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Vérifier que $x - f(x) \in \ker(f)$ et $f(x) \in \ker(f - \text{Id})$ puis établir que $\mathbb{R}^n = \ker(f) \oplus \ker(f - \text{Id})$. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2. Etude d'une suite de matrices. Soient $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$(B(B - I_n))^N = 0_n.$$

On introduit la suite $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$B_0 = B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad B_{k+1} = (B_k)^2 (2B_k - I_n)^{-1}.$$

On considère pour tout entier $k \geq 0$ la proposition

(\mathcal{H}_k) : « $2B_k - I_n$ est inversible, il existe $C_k, D_k \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $B_k - B = [B(B - I_n)] C_k$, et $B_k(B_k - I_n) = [B(B - I_n)]^{2^k} D_k$ avec $B_k B = B B_k$, $C_k B = B C_k$ et $D_k B = B D_k$ »

- (a) Justifier que $I_n - (2B - I_n)^2$ est nilpotente et que $2B - I_n$ est inversible. En déduire que la propriété (\mathcal{H}_0) est vraie.
- (b) On suppose la propriété (\mathcal{H}_k) vraie pour un entier $k \geq 0$. Montrer que :

$$\begin{aligned} 2B_{k+1} - I_n &= [I_n + 2B_k(B_k - I_n)] \times [2B_k - I_n]^{-1} \\ B_{k+1} - B &= [(B_k - B)^2 - (B^2 - B)] \times [2B_k - I_n]^{-1} \end{aligned}$$

$$B_{k+1}(B_{k+1} - I) = [B_k(B_k - I_n)(2B_k - I)^{-1}]^2$$

En déduire que la propriété (\mathcal{H}_{k+1}) est vraie.

(c) Prouver l'existence d'un entier p tel que : $B_p (B_p - I_n) = 0_n$.

Etablir que la matrice B_p est diagonalisable, que la matrice $B - B_p$ est nilpotente et que : $\forall k \geq p, B_{k+1} = B_k$.

PROBLEME.

L'objectif du problème est d'étudier une suite de variables aléatoires $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Les deux premières parties sont indépendantes et la troisième utilise certains résultats obtenus dans les deux premières parties. La partie **I** est consacrée à l'étude de deux endomorphismes sur $\mathbb{R}_n[X]$. La partie **II** consiste à calculer l'espérance et la variance de Z_k ainsi qu'à calculer la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_k = r)$ sous réserve de convergence. La partie **III** fournira la loi de Z_k ainsi que l'étude de la convergence de la série $\sum_{k \geq 0} P(Z_k = r)$.

Partie I : Etude de deux endomorphismes.

Soit n un entier naturel. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n . Pour tout entier $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, on désigne par e_k le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$e_k = X^k$$

Rappelons que (e_0, e_1, \dots, e_n) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on définit les fonctions $f(P)$ et $g(P)$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f(P)(x) = \frac{1}{x-1} \int_1^x P(t) dt \quad \text{et} \quad f(P)(1) = P(1)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(P)(x) = [(X-1)P]'(x) = (x-1)P'(x) + P(x).$$

1. Prouver que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Calculer $f(g(P))$ puis justifier que $\ker(g) = \{0\}$.
3. Démontrer que g est un isomorphisme, que $g^{-1} = f$ et que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Ecrire la matrice A de f dans la base (e_0, e_1, \dots, e_n) ainsi que la matrice B de g dans cette même base.
5. Montrer que f et g sont diagonalisables.

Partie II : Etude d'une suite de variables aléatoires.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On dispose de $n + 1$ urnes notées U_0, U_1, \dots, U_n et on suppose que $\forall i \in \{0, \dots, n\}$, l'urne U_i contient $i + 1$ boules numérotées $0, 1, \dots, i$. On s'intéresse au jeu suivant :

- au premier tirage, on pioche une boule dans l'urne U_n . Si la boule porte le numéro r alors on repose la boule dans l'urne U_n puis le tirage suivant s'effectue dans l'urne U_r .
- Plus généralement, pour tout entier k non nul, si la boule numéro s a été piochée au k -ième tirage dans une certaine urne, on repose cette boule dans la même urne puis on effectue le $(k + 1)$ -ième tirage dans l'urne U_s .

Pour tout entier naturel k , on note :

- Z_k est la variable aléatoire égale au numéro de la boule piochée au k -ième tirage. **On convient que $Z_0 = n$.**
- F_k est le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $\forall x \in \mathbb{R}, F_k(x) = \sum_{r=0}^n P(Z_k = r) x^r$.
- $E(Z_k)$ l'espérance de la variable Z_k .

1. A l'aide de la formule des probabilités totales, prouver que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall r \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad P(Z_{k+1} = r) = \sum_{i=r}^n \frac{P(Z_k = i)}{i + 1}.$$

2. Etablir les deux formules suivantes valables pour tous entiers $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$

$$\begin{cases} (\mathcal{R}_1) : (n + 1) P(Z_{k+1} = n) = P(Z_k = n) \\ (\mathcal{R}_2) : (r + 1) P(Z_{k+1} = r) - (r + 1) P(Z_{k+1} = r + 1) = P(Z_k = r) \end{cases}$$

3. On admet dans cette question que la série $\sum_{k \geq 0} P(Z_k = r)$ converge pour tout

$$r \in \{1, \dots, n\} \text{ et on pose } S_r = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_k = r).$$

En sommant les relations (\mathcal{R}_1) sur tous les entiers $k \in \mathbb{N}$, donner la valeur de S_n .

En sommant les relations (\mathcal{R}_2) sur tous les entiers $k \in \mathbb{N}$, donner la valeur de S_{n-1} et montrer que la suite $(rS_r)_{1 \leq r \leq n-1}$ est constante.

4. Soit $k \in \mathbb{N}$. Démontrer la relation

$$(\mathcal{S}) : \forall x \in \mathbb{R}, \quad (x - 1) F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x) = F_k(x).$$

5. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Etablir que $F'_k(1) = E(Z_k)$ et $F''_k(1) = E(Z_k(Z_k - 1))$.
 (b) En dérivant une fois puis deux fois la relation (\mathcal{S}) , donner la relation de récurrence vérifiée par la suite $(F'_k(1))_{k \in \mathbb{N}}$ ainsi que la relation de récurrence vérifiée par la suite $(F''_k(1))_{k \in \mathbb{N}}$.
 (c) Donner la valeur de $F'_k(1)$ et de $F''_k(1)$ en fonction de k et n . Expliciter alors la variance $V(Z_k)$ de Z_k en fonction de k et n .

Partie III : Loi de chacune de ces variables aléatoires.

On reprend toutes les notations des parties I et II et on pourra admettre tous les résultats établis dans ces deux parties. Rappelons également qu'à la question II.4 la relation (\mathcal{S}) est démontrée ce qui revient à écrire :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad g(F_{k+1}) = F_k.$$

Pour finir, pour tout entier $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ on désigne par u_k le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ définie par :

$$u_k = (X - 1)^k.$$

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \sum_{r=0}^n P(Z_k = r) e_r = F_k = f^k(e_n)$.
2. Prouver que (u_0, u_1, \dots, u_n) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Calculer $f(u_r)$ pour $r \in \{0, 1, \dots, n\}$. Retrouver ainsi que f est diagonalisable.
4. Justifier que : $e_n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} u_r$ et que : $\forall r \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad u_r = \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} e_j$.
5. Démontrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^k(e_n) = \sum_{r=0}^n \frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k} u_r$.
6. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $j \in \{0, 1, \dots, n\}$. A l'aide des questions précédentes, établir que :

$$P(Z_k = j) = \sum_{r=j}^n (-1)^{r-j} \frac{\binom{n}{r} \binom{r}{j}}{(r+1)^k}.$$

7. Application.

- (a) Soit $j \in \{0, 1, \dots, n\}$. Déterminer un réel $M_{j,n}$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |P(Z_k = j)| \leq \frac{M_{n,j}}{(j+1)^k}$$

puis justifier que la série $\sum_{k \geq 0} P(Z_k = j)$ converge lorsque $j \in \{1, \dots, n\}$.

(b) Déterminer un réel C_n tel que : $\forall k \in \mathbb{N}, |P(Z_k = 0) - 1| \leq \frac{C_n}{2^k}$.

La série $\sum_{k \geq 0} P(Z_k = 0)$ est-elle convergente ?