SUJET

EXERCICE 1.

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que A est inversible et expliciter A^{-1}.

   (b) On rappelle que $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Prouver que, pour tout entier $n \geqslant 0$, il existe deux réels u_n, v_n tels que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2u_n & 1 & 0 \\ v_n & u_n & 1 \end{pmatrix}$; On vérifiera que :

   $$u_0 = v_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n - 1 \\ v_{n+1} = v_n - 2u_n \end{cases}.$$

   (c) Exprimer u_n en fonction de n.

   (d) Démontrer que : $\forall n \geqslant 1, \quad v_n = 2\sum_{k=0}^{n-1} k$.

   (e) En déduire une expression simplifiée de v_n puis écrire A^n sous la forme d'un tableau de nombres.

2. Soit f la fonction qui à tout réel x associe $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$, où a, b, c sont trois réels.

   (a) Pour tout réel x, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ s'écrit sous la forme :

   $$f'(x) = (a_1x^2 + b_1x + c_1)e^{-x}$$

   où a_1, b_1, c_1 sont trois réels. Vérifier que : $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = -A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

   (b) Expliciter $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ en fonction de $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ en utilisant la matrice A^{-1}.

3. Application. Soient r et s les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad r(x) = (x+1)\,e^{-x} \quad \text{et} \quad s(x) = \left(x^2 + x\right)e^{-x}.$$

   Déduire de la question précédente une primitive R de r et une primitive S de s.

4. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x<0, \quad g(x)=0, \quad \forall x \geqslant 0, \quad g(x)=\frac{1}{2}(x+1)\, e^{-x}.$$

   (a) Soit $X \in [0,+\infty[$. Calculer $\int_0^X g(x)dx$ et $\int_0^X xg(x)dx$.

   (b) En déduire la convergence des intégrales $\int_0^{+\infty} g(x)dx$ et $\int_0^{+\infty} xg(x)dx$ puis donner leurs valeurs respectives.

   (c) Prouver que g est une densité de probabilité.

   (d) Soit Y une variable aléatoire possédant g pour densité.

   Démontrer que Y admet une espérance et donner la valeur de $E(Y)$.

EXERCICE 2.

On considère la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ par :

$$\forall x \in [1,+\infty[, \quad f(x)=\frac{x^2}{2x-1}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. On définit également la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par :

$$u_0 \in [1,+\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1}=f(u_n)$$

1. Etude de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

   (a) Soit $x \geqslant 1$. Etablir les inégalités suivantes : $1 \leqslant f(x)$ et $f(x) \leqslant \frac{x+1}{2}$.

   (b) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant u_n$.

   En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant \frac{u_n+1}{2}$.

   (c) Prouver par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant u_n \leqslant 1+\frac{1}{2^n}(u_0-1)$.

   (d) Démontrer la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et donner la valeur de sa limite.

2. Asymptote à $\mathcal{C}_f$. On pose $a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ et $b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]$.

(a) Donner la valeur de $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

(b) Calculer a et b.

(c) Montrer qu'il existe un réel c tel que :

$$\forall x \in [1, +\infty[\,, \quad f(x) - ax - b = \frac{c}{2x-1}$$

et donner la valeur de c.

(d) Prouver que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote $(\mathcal{D})$ dont on donnera une équation ainsi que la position de $(\mathcal{D})$ par rapport à $\mathcal{C}_f$.

3. <u>Variations de f.</u>

(a) Soit $x \in [1, +\infty[$. Calculer $f'(x)$.

(b) Préciser le sens de variations de f sur $[1, +\infty[$.

(c) Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ ainsi que la droite $(\mathcal{D})$ et la tangente $(\mathcal{T})$ à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 1.

4. <u>Etude d'une réciproque.</u>

(a) Montrer que la fonction f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$.

(b) Soit $t \in [1, +\infty[$. Prouver que l'équation $x^2 - 2tx + t = 0$ (d'inconnue x) admet des solutions réelles et les donner.

(c) Soit $t \in [1, +\infty[$. Déterminer l'unique réel $x \in [1, +\infty[$ tel que $f(x) = t$.

EXERCICE 3.

On considère deux urnes notées respectivement U et V. On suppose que :
– l'urne U contient deux boules noires et deux boules blanches ;
– l'urne V contient deux boules noires, deux boules blanches et deux boules vertes.

1. On considère l'expérience suivante $(\mathcal{E})$: « On tire au hasard et simultanément deux boules dans l'urne U, on note leur couleur, puis on les remet dans l'urne U ».

(a) Calculer la probabilité d'obtenir deux boules de même couleur.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On répète n fois l'expérience $(\mathcal{E})$ et on note N la variable aléatoire égale au nombre de fois où on a obtenu deux boules de même couleur lors de ces n tirages dans l'urne U.

(b) Donner la loi de N en explicitant $P(N = k)$ pour k appartenant aux valeurs prises par N.

(c) Préciser la valeur de l'espérance $E(N)$ de N ainsi que sa variance $V(N)$.

(d) Quelle est la probabilité que sur ces n tirages, on ait obtenu au moins une fois deux boules de même couleur ?

2. On considère une autre expérience $(\mathcal{F})$: « On tire au hasard et simultanément deux boules dans l'urne U. Si les deux boules sont de même couleur, on enlève ces deux boules de l'urne U. Si elles sont de couleurs différentes, on repose les deux boules dans l'urne U puis on recommence l'expérience jusqu'à ce que l'urne U soit vide ».

   On note X le nombre de tirages nécessaires pour que l'urne U soit vide. On désigne par A l'évènement : « au premier tirage dans l'urne U, les deux boules sont de même couleur » et on note a sa probabilité c'est-à-dire $a = P(A)$.

   (a) Calculer $P(X=1)$, $P(X=2)$ et $P(X=3)$.

   (b) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$: $P(X=n) = a(1-a)^{n-2}$.

   (c) Etablir que la variable $Z = X - 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

   (d) Donner l'espérance et la variance de Z puis l'espérance et la variance de X.

3. On considère deux réels r, s distincts et non nuls ainsi qu'un réel λ. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ définie par :

$$u_2 = 0, \quad \forall n \geqslant 2, \quad u_{n+1} = \lambda\, r^{n-2} + s\, u_n.$$

   Montrer par récurrence que :

$$\forall n \geqslant 2, \quad u_n = \frac{\lambda}{r-s}\left(r^{n-2} - s^{n-2}\right).$$

4. On considère une nouvelle expérience $(\mathcal{G})$: « On tire au hasard et simultanément deux boules dans l'urne V. Si les deux boules sont de même couleur, on enlève ces deux boules de l'urne V. Si elles sont de couleurs différentes, on repose les deux boules dans l'urne V puis on recommence l'expérience jusqu'à ce que l'urne V soit vide ».

   On note Y le nombre de tirages nécessaires pour que l'urne V soit vide. On désigne par B l'évènement : « au premier tirage dans l'urne V, les deux boules sont de même couleur » et on note b sa probabilité c'est-à-dire $b = P(B)$.

   (a) Calculer la probabilité b.

(b) Calculer $P(Y=2)$ et $P(Y=3)$.

(c) A l'aide du système complet d'évènements $\left(B,\overline{B}\right)$, démontrer que, pour tout $n\geqslant 2$:

$$P(Y=n+1)=bP(X=n)+(1-b)P(Y=n)$$

(d) A l'aide de la question 3, montrer que :

$$\forall n\geqslant 2,\quad P(Y=n)=\frac{ab}{b-a}\left((1-a)^{n-2}-(1-b)^{n-2}\right)$$

(e) Calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}P(Y=n)$.

(f) Montrer que Y admet une espérance puis calculer $E(Y)$.