



Code épreuve : 294

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : E.S.C. CHAMBERY

MATHEMATIQUES

OPTION TECHNOLOGIQUE

N.B.

Il n'est fait usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par ses deux premiers termes $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$ ainsi que la relation :

$$\text{pour tout entier naturel } n, u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$$

Soit les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n , $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. a) Montrer que pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = AU_n$.
b) Etablir, par récurrence, que pour tout entier naturel n , $U_n = A^n U_0$.
2. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
a) Vérifier que $AP = PT$.
b) Etablir que pour tout entier naturel n , $A^n P = PT^n$.
3. On pose $B = T - \frac{1}{2}I$.
a) Donner les quatre coefficients de B puis calculer B^2 .
Donner B^k pour tout entier $k \geq 2$.
b) En utilisant la formule du binôme, montrer que : $\forall n \geq 1, T^n = \frac{1}{2^n}I + \frac{n}{2^{n-1}}B$.
Cette formule est-elle aussi vraie pour $n = 0$?
c) En déduire, pour tout entier naturel n , les quatre coefficients de T^n .
4. a) Justifier que P est inversible et vérifier que : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$.
b) Déduire des questions précédentes, pour tout entier naturel n , les quatre coefficients de A^n .
5. Déterminer, pour tout entier naturel n , une expression de u_n en fonction de n .

Exercice 2

Partie I - Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - e^{-x} - 1$ et $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

1. a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
b) Etablir que $\mathcal{C}$ admet une droite asymptote D au voisinage de $+\infty$ et préciser une équation de D .
c) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Que pouvez-vous en déduire sur la courbe $\mathcal{C}$?
2. Etudier le sens de variation de f et dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer les limites en $+\infty$ et $-\infty$.
3. a) Etablir que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ notée α .
b) Justifier que $\alpha \in [1, 2]$. On pourra utiliser les valeurs approchées : $e^{-1} \simeq 0,4$ et $e^{-2} \simeq 0,1$.
4. Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ et de D en faisant figurer le réel α . On pourra utiliser la valeur approchée $\alpha \simeq 1,3$.

Partie II - Approximation de α

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = e^{-x} + 1$. On définit également la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = h(u_n)$.

1. Montrer que l'équation $h(x) = x$ admet comme unique solution sur $\mathbb{R}$ le réel α défini en I.3.
2. Montrer que pour tout réel x de $[1, 2]$, $-\frac{1}{e} \leq h'(x) < 0$.
En déduire que, pour tout réel x de $[1, 2]$, $|h'(x)| \leq \frac{1}{e}$.
3. a) Montrer que h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
b) Prouver par récurrence que pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq 2$.
On pourra utiliser les valeurs approchées suivantes : $h(1) \simeq 1,4$ et $h(2) \simeq 1,1$.
4. a) Enoncer avec précision le théorème de l'inégalité des accroissements finis.
b) Etablir que pour tout entier naturel n , $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e} |u_n - \alpha|$.
c) En déduire que pour tout entier naturel n , $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{e^n}$.
5. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.

Exercice 3

Un professeur interroge ses élèves en posant une liste de vingt questions. Pour chaque question, il y a trois réponses possibles, une seule étant la bonne réponse. L'élève A répond au questionnaire. On suppose que :

- L'élève A ne connaît que 60% de son cours. C'est-à-dire que pour chaque question la probabilité qu'il connaisse la réponse est $\frac{60}{100}$.
- Lorsqu'il ne connaît pas une réponse à une question, il répond au hasard.
- Les questions posées sont mutuellement indépendantes.

On considère les événements

- R : « l'élève A connaît la réponse à la première question ».
- J : « l'élève A répond juste à la première question ».

1. Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que $P(J) = \frac{11}{15}$.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de réponses exactes données par l'élève A aux vingt questions.

2. Reconnaître la loi de X . On donnera les valeurs prises par X et pour chacune de ces valeurs k la valeur de $P(X = k)$.
3. Donner $E(X)$ et $V(X)$, l'espérance et la variance de X .
4. Pour sanctionner les choix faits au hasard, le professeur décide d'accorder un point par réponse exacte et de retirer deux points par réponse fausse.

Soit N la variable aléatoire égale à la note obtenue par l'élève A.

- a) Justifier l'égalité : $N = 3X - 40$.
- b) En déduire l'espérance de N ainsi que sa variance.

L'élève B répond lui aussi au questionnaire. On suppose que comme l'élève A, il ne connaît que 60% de son cours. Mais il choisit de ne répondre qu'aux questions dont il connaît la réponse.

5. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses de l'élève B.

- a) Déterminer la loi de Y .
- b) En déduire la note que l'élève B obtient en moyenne.
- c) En moyenne, entre l'élève A et l'élève B quelle est la meilleure stratégie pour obtenir une bonne note ?

Exercice 4

Dans cet exercice, on s'intéresse à la durée de vie d'un composant électronique comme somme de son temps de stockage noté X et de son temps de fonctionnement noté Y .

Partie I

On considère un composant électronique pour lequel le temps écoulé (en années) entre la fin de son processus de fabrication et sa première utilisation est une variable aléatoire X de densité f donnée par :

$$\begin{cases} f(t) = 1 - \frac{1}{2}t & \text{si } t \in [0, 2] \\ f(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
2. Soit F la fonction de répartition de X . Calculer $F(x)$ en distinguant les cas : $x < 0$, $0 \leq x \leq 2$ et $x > 2$.
3. Calculer les probabilités suivantes : $P(X \geq 1)$, $P\left(1 \leq X \leq \frac{3}{2}\right)$ et $P_{(X \geq 1)}\left(X \leq \frac{3}{2}\right)$.
4. Montrer que $E(X) = \frac{2}{3}$.

Partie II

On admet que la durée de vie en années du composant électronique à partir de sa première utilisation est une variable aléatoire Y de densité g donnée par :

$$\begin{cases} g(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ g(t) = \frac{2}{5}e^{-\frac{2}{5}t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

1. a) Calculer pour tout réel x positif, $\int_0^x g(t)dt$.
b) En déduire la fonction de répartition G de Y .
2. Justifier que g est une densité de probabilité d'une loi usuelle. Préciser le paramètre de cette loi. Calculer l'espérance de Y .
3. Le composant électronique est garanti pendant 2 ans à partir de sa première utilisation. Quelle est la probabilité qu'il dure au-delà de la garantie ?
4. Soit Z la variable aléatoire égale au temps en années écoulé entre la fin de fabrication du composant et sa fin de vie.
 - a) Exprimer Z en fonction de X et de Y .
 - b) En déduire le temps moyen écoulé entre la fin de fabrication du composant et sa fin de vie.