BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2012

Conception : H.E.C.

OPTION LITTERAIRE

MATHEMATIQUES B/L

Lundi 14 mai 2012, de 8 h. à 12 h.

L'épreuve est constituée de trois exercices indépendants.

EXERCICE 1

On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $x_0 \in]0,1[$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n - x_n^2$.

Partie 1

1. Dresser le tableau de variation de la fonction f à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie sur $[0,1]$ par : $f(x) = x - x^2$.

2.a) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et convergente.

b) Déterminer la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.a) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'encadrement : $0 < x_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

b) Retrouver ainsi la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = nx_n$.

a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ, que l'on ne demande pas de calculer.

c) Montrer que : $0 < \ell \leqslant 1$.

5. On considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}, w_n = n(v_{n+1} - v_n)$.

a) Montrer que la série de terme général $\dfrac{w_n}{n}$ est convergente.

b) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, w_n en fonction de x_n et v_n.

c) En déduire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell(1-\ell)$.

d) À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que $\ell = 1$.

e) Donner un équivalent simple de x_n quand n tend vers $+\infty$.

Partie 2

6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n soit divergente, et soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle convergente. On pose : $L = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

   a) Établir pour tout entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier $n > n_0$, l'inégalité suivante :
$$\left|\frac{1}{S_n}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k y_k\right) - L\right| \leqslant \frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{n_0} u_k|y_k - L| + \frac{1}{S_n}\sum_{k=n_0+1}^{n} u_k|y_k - L|$$

   b) En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{S_n}\sum\limits_{k=1}^{n} u_k y_k = L$.

7. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles et γ un réel tels que :
   - la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$;
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{t_{n+1}-t_n}{z_{n+1}-z_n} = \gamma$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $a_n = z_n - z_{n-1}$ et $b_n = \dfrac{t_n - t_{n-1}}{z_n - z_{n-1}}$.

   a) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie les propriétés de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de la question 6.

   b) En appliquant le résultat de la question 6 aux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{t_n}{z_n} = \gamma$.

8.a) Établir l'équivalent suivant : $\dfrac{n(1-nx_n)}{\ln n} \sim \dfrac{\dfrac{1}{x_n} - n}{\ln n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

   b) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\left(\dfrac{1}{x_{n+1}} - \dfrac{1}{x_n} - 1\right)}{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} = 1$.

   c) En déduire, en utilisant le résultat de la question 7 avec $t_n = \dfrac{1}{x_n} - n$ et $z_n = \ln n$, l'existence d'une suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 2}$ de limite nulle telle que : $\dfrac{n(1-nx_n)}{\ln n} = 1 - \varepsilon_n$.

   d) En déduire finalement le développement asymptotique suivant : $x_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{\ln n}{n^2} + \dfrac{\ln n}{n^2}\varepsilon_n$.

EXERCICE 2

Dans tout l'exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2.

Tout vecteur $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est identifié à la matrice-colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de ses coordonnées dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

On note $\mathrm{Sp}(K)$ (respectivement $\mathrm{Sp}(\Phi)$) l'ensemble des valeurs propres d'une matrice carrée K (respectivement d'un endomorphisme Φ d'un espace vectoriel de dimension finie).

On note ${}^tM$ la matrice transposée d'une matrice M et I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Dans tout l'exercice, A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables.
On définit les trois endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, f_A, g_B et $h_{A,B}$, par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f_A(M) = AM,\ g_B(M) = MB \text{ et } h_{A,B} = f_A - g_B$$

1.a) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur de $\mathbb{R}^n$, vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.
Montrer que $X{}^tX$ est un vecteur propre de f_A et donner la valeur propre associée.

b) Soit θ une valeur propre de f_A. Montrer que la matrice $A - \theta I_n$ n'est pas inversible.

c) Déduire de ce qui précède que $\mathrm{Sp}(f_A)$=$\mathrm{Sp}(A)$.

d) Montrer que $\mathrm{Sp}({}^tB)$=$\mathrm{Sp}(B)$. En déduire que $\mathrm{Sp}(g_B)$=$\mathrm{Sp}(B)$.

2.a) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé, μ une valeur propre de ${}^tB$ et Y un vecteur propre associé.
Montrer que $X{}^tY$ est un vecteur propre de $h_{A,B}$ et donner la valeur propre associée.

b) Soit β une valeur propre de $h_{A,B}$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé.
Montrer, en utilisant le fait que B est diagonalisable, qu'il existe un vecteur propre V de B associé à une valeur propre μ, tel que $MV \neq 0$.
En déduire qu'il existe un scalaire $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ tel que $\beta = \lambda - \mu$.

c) Déduire de ce qui précède que $\mathrm{Sp}(h_{A,B}) = \{\lambda - \mu,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ \mu \in \mathrm{Sp}(B)\}$.

d) Démontrer l'équivalence suivante : $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset \Leftrightarrow h_{A,B}$ est bijective.

3. Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ et V un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

On note pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $X_j = \begin{pmatrix} p_{1,j} \\ p_{2,j} \\ \vdots \\ p_{n,j} \end{pmatrix}$. On pose : $P = (p_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$.

a) Déterminer en fonction des réels $p_{i,j}$ et v_i, les éléments $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ de la matrice ${}^tVP$.

b) En déduire que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe un unique vecteur V_i de $\mathbb{R}^n$, tel que : ${}^tV_iX_i = 1$, et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ avec $j \neq i$, ${}^tV_iX_j = 0$.

c) On considère une base $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de A, et une base $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de ${}^tB$.
On pose, pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $M_{i,j} = X_i{}^tY_j$.
Montrer que la famille $(M_{i,j})$, où $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en déduire que $h_{A,B}$ est diagonalisable.

EXERCICE 3

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, suivant toutes la loi géométrique de paramètre p, où p est un réel de $]0, 1[$. On pose : $q = 1 - p$.
Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, indépendante des variables aléatoires $X_n (n \in \mathbb{N}^*)$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose : $Y(\omega) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega)$, et on admet que $Y = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} X_i$ est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

On rappelle que pour tout couple d'entiers naturels (n, k), on a : $\displaystyle\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

De plus, on pourra utiliser, sans justification, la formule (1) suivante :

$$\text{pour tout couple}\,(r,s) \in \mathbb{N}^2 \text{ avec}\, r \leqslant s,\ \sum_{j=r}^{s} \binom{j}{r} = \binom{s+1}{r+1} \qquad (1)$$

1. Montrer que la loi de S_2 est donnée par : $S_2(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$, et pour tout $k \geqslant 2$, $P([S_2 = k]) = (k-1)p^2q^{k-2}$.

2. Déterminer pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la loi de X_1 conditionellement à l'événement $[S_2 = n]$.

3.a) Déterminer $S_n(\Omega)$.

b) En utilisant la formule (1) et à l'aide d'une démonstration par récurrence sur n, montrer que :

$$\text{pour tout}\, k \in S_n(\Omega),\ P([S_n = k]) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}$$

4.a) En utilisant le fait que S_{n-1} est une variable aléatoire, établir l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-2}{n-2} q^{k-n} = \frac{1}{p^{n-1}}$.

b) Vérifier que pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout entier $k \geqslant n$, on a : $\displaystyle\frac{n-1}{k-1}\binom{k-1}{n-1} = \binom{k-2}{n-2}$.

c) Soit R_n la variable aléatoire définie par : $R_n = \dfrac{n-1}{S_n - 1}$. Montrer que l'espérance de R_n est égale à p.

5.a) Déterminer $Y(\Omega)$.

b) Pour tout couple $(k,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, montrer que : $P([Y = k] \cap [N = n]) = P([S_n = k]) \times P([N = n])$.

c) Donner pour tout couple $(k,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $k < n$, la valeur de $P([Y = k] \cap [N = n])$.

d) Déduire des questions précédentes que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P([Y = k]) = \displaystyle\sum_{n=1}^{k} P([S_n = k]) \times P([N = n])$.

6. On suppose dans cette question que N suit la loi géométrique de paramètre p.
Montrer que Y suit la loi géométrique de paramètre p^2.

7. On suppose réciproquement que Y suit la loi géométrique de paramètre p^2.

a) Montrer que $P([N = 1]) = p$.

b) Montrer également que $P([N = 2]) = pq$.

c) À l'aide d'une démonstration par récurrence, montrer que N suit la loi géométrique de paramètre p.