

**SUJET**

**EXERCICE 1**

On définit les trois matrices carrées d'ordre 2 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On considère également la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0, \quad u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 3}.$$

1. Inverse de  $P$ . Montrer que la matrice  $P$  est inversible et calculer  $P^{-1}$ .
2. Calcul de  $A^n$ . On pose  $B = P^{-1}AP$ .
  - (a) Vérifier que  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  (les calculs intermédiaires devront être indiqués sur votre copie).
  - (b) Donner les quatre coefficients de la matrice  $B^n$ .
  - (c) Démontrer par récurrence que :  $\forall n \geq 0, \quad A^n = PB^nP^{-1}$  puis donner les quatre coefficients de la matrice  $A^n$ .
3. Convergence de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$ .
  - (a) Démontrer par récurrence que  $\forall n \geq 0, \quad u_n \geq 1$ .
  - (b) Déterminer le signe de  $u_{n+1} - u_n$ . En déduire le sens de variation de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$ .
  - (c) Prouver que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge. On note  $L$  la limite de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$ .
  - (d) Montrer que  $L = \frac{3L + 1}{L + 3}$ , résoudre cette équation puis déterminer  $L$ .
4. Calcul de  $u_n$  et de sa limite. Pour tout entier  $n$ , on considère les deux suites  $(a_n)_{n \geq 0}$  et  $(b_n)_{n \geq 0}$  définies par :

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ b_0 = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{3}{2}b_n \end{cases}$$

On admettra que :  $\forall n \geq 0, \quad a_n > 0$  et  $b_n > 0$ .

- (a) Prouver par récurrence que :  $\forall n \geq 0, \quad u_n = \frac{a_n}{b_n}$ .
- (b) Posons :  $\forall n \geq 0, \quad U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ . Donner l'expression de  $U_{n+1}$  en fonction de  $A$  et  $U_n$  puis donner (sans démonstration) l'expression de  $U_n$  en fonction de  $A, n$  et  $U_0$ .
- (c) Donner l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  puis retrouver ainsi la limite de  $(u_n)_{n \geq 0}$ .

## EXERCICE 2

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = 2x + \frac{3 \ln(x)}{x^2};$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = 2x^3 - 6 \ln(x) + 3.$$

On note  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f$ .

1. Etude du signe de  $g$ .
  - (a) Calculer  $g'(x)$  lorsque  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .
  - (b) Vérifier que l'équation  $g'(x) = 0$  admet une unique solution  $p$  que l'on précisera et construire le tableau de variations de  $g$ .
  - (c) Calculer  $g(p)$  puis donner le signe de  $g(x)$  lorsque  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .
2. Etude asymptotique de  $f$ .
  - (a) Déterminer la limite de  $f(x)$  quand  $x \rightarrow 0^+$  et quand  $x \rightarrow +\infty$ .
  - (b) On note  $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  et  $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$ . Calculer  $a$  et  $b$ .
  - (c) Donner l'équation de l'asymptote ( $\mathcal{A}$ ) de  $\mathcal{C}_f$  quand  $x \rightarrow +\infty$  et préciser la position de cette asymptote par rapport à ( $\mathcal{C}_f$ ).
3. Représentation graphique de  $f$ .
  - (a) Démontrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ .
  - (b) Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  en indiquant dans celui-ci les limites de  $f$  en  $0^+$  et  $+\infty$ .

(c) Tracer sur un même dessin le graphe de  $\mathcal{C}_f$  ainsi que celui de son asymptote ( $\mathcal{A}$ ).

4. Etude d'une équation. Soit  $n \geq 1$  un entier naturel non nul, on considère l'équation

$$(\mathcal{E}_n) : f(x) = 2n.$$

(a) Prouver que l'équation  $(\mathcal{E}_n)$  admet une unique solution (*que l'on ne cherchera pas à calculer*). On note  $x_n$  cette solution.

(b) Calculer puis classer par ordre croissant les réels  $f(x_n)$ ,  $f(1)$  et  $f(n)$ .  
 En déduire l'encadrement :

$$\forall n \geq 1, \quad 1 \leq x_n \leq n.$$

(c) Justifier que :  $\forall n \geq 1, \quad 1 - \frac{x_n}{n} = \frac{3 \ln(x_n)}{2n(x_n)^2}$ .

(d) Prouver que :  $\forall n \geq 1, \quad 0 \leq \frac{\ln(x_n)}{n(x_n)^2} \leq \frac{\ln(n)}{n}$ .

(e) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n}$ .

### EXERCICE 3

Une entreprise fabrique des appareils électriques en grande quantité.

#### I. Probabilités conditionnelles.

On admet que 5% des appareils présentent un défaut.

On contrôle les appareils d'un lot. Ce contrôle refuse 90% des appareils avec défaut et accepte 80 % des appareils sans défaut. On prélève un appareil au hasard dans le lot.

On considère les événements suivants :

- $D$  : « l'appareil a un défaut » ;
- $A$  : « l'appareil est accepté à l'issue du contrôle ».

1. Donner la valeur des probabilités et probabilités conditionnelles suivantes :

$$P(D), \quad P(\overline{D}), \quad P_D(\overline{A}), \quad P_D(A), \quad P_{\overline{D}}(A).$$

2. Calculer à 0,001 près les probabilités suivantes :

$$P(A \cap D), \quad P(A \cap \overline{D}).$$

3. Dédire de ce qui précède la probabilité  $P(A)$  à 0,001 près.
4. Calculer à 0,001 près la probabilité qu'un appareil soit défectueux sachant qu'il a été accepté par le contrôle.

## II. Loi binomiale.

On prélève au hasard 10 appareils électriques d'une livraison pour vérification. La livraison étant suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise des appareils. On rappelle que 5% des appareils présentent un défaut.

On considère la variable aléatoire  $X$  qui, à tout prélèvement de 10 appareils, associe le nombre d'appareils **sans défaut** de ce prélèvement.

- Justifier que  $X$  suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres. Préciser  $X(\Omega)$  et, pour tout  $k \in X(\Omega)$ , donner la valeur de  $P(X = k)$ .
- Donner la probabilité que, dans un tel prélèvement, tous les appareils soient sans défaut.
- Donner la probabilité que, dans un tel prélèvement, au moins un appareil ait un défaut.

## III. Etude d'une densité de probabilité.

On considère la fonction  $f$  de la variable réelle définie par :

$$\begin{cases} \text{Si } t \leq 0 & f(t) = 0 ; \\ \text{Si } t > 0 & f(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t}. \end{cases}$$

- Prouver que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- Justifier que :  $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) \geq 0$ .

3. Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ . Calculer  $\int_0^x f(t) dt$ .

4. Montrer que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  converge et préciser sa valeur.

5. Justifier que  $f$  est une densité de probabilité d'une variable aléatoire  $T$ .

#### IV. Une variable à densité.

La durée de vie des appareils électriques, exprimée en centaines d'heures, est une variable aléatoire à densité notée  $T$ , dont une densité est la fonction  $f$  (définie à la partie III).

La probabilité qu'un appareil électrique fonctionne au moins jusqu'à la date  $x$  est donc donnée par la probabilité de l'événement  $[T > x]$ .

On note  $F$  la fonction de répartition de  $T$  c'est-à-dire la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = P(T \leq x).$$

1. Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad F(x) = (1 - e^{-x})^2$ .
2. Déterminer la durée médiane de fonctionnement des appareils c'est-à-dire le temps  $x$  tel que  $F(x) = \frac{1}{2}$ .
3. A l'aide d'une intégration par parties, calculer  $\int_0^x t f(t) dt$  lorsque  $x \in \mathbb{R}_+$ .
4. En déduire la durée moyenne de fonctionnement des appareils, c'est-à-dire  $E(T)$ .