



ESCP 2013

Filière ECT

(Énoncé)

Exercice 1

Soit f_0 la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par $f_0(x) = e^{-3x}$. Pour tout entier $n \geq 1$, on définit la fonction f_n sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = (1-x)^n e^{-3x}$.

On pose pour tout n de \mathbb{N} : $u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

- Calculer u_0 .
- Montrer que pour tout n de \mathbb{N} , on a : $u_n \geq 0$.
 - Établir pour tout n de \mathbb{N} , l'inégalité suivante : $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
 - En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
- Montrer que pour tout n de \mathbb{N} , on a : $u_n \leq \frac{1}{n+1}$.
 - Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- À l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout n de \mathbb{N} , la relation suivante :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3} - \frac{n+1}{3} u_n$$

- En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n$.
- On pose pour tout n de \mathbb{N} : $v_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k 3^k}{k!} - e^{-3}$.
 - Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.
 - En utilisant un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout n de \mathbb{N} , on a :

$$u_n = \frac{(-1)^n n!}{3^{n+1}} v_n$$

Exercice 2

La matrice unité à 2 lignes et 2 colonnes est notée $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on rappelle que si A est une matrice à 2 lignes et 2 colonnes, on pose par convention : $A^0 = I$.

Soit a un réel quelconque et A la matrice définie par : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$.

- On suppose que $a = 1$. Calculer A^2 et A^3 . Déterminer par récurrence, pour tout n de \mathbb{N} , la matrice A^n .
 - On revient au cas général où a est un réel quelconque.
Montrer que la matrice A est inversible si et seulement si $a \neq 0$.

2. Dans cette question, A est la matrice définie par : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 0$ et pour tout n de \mathbb{N} , $u_{n+1} = 1 + 2u_n$.
- a) Montrer par récurrence que pour tout n de \mathbb{N} , on a : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u_n & 1 + u_n \end{pmatrix}$.
- b) Déterminer pour tout n de \mathbb{N} , u_n en fonction de n .
3. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1.
On note Y une variable aléatoire discrète à valeurs dans \mathbb{N} telle que pour tout k de \mathbb{N} , on a :

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(k \leq X < k + 1)$$

- a) Soit F la fonction de répartition de X . Expliciter, pour tout x réel, $F(x)$.
- b) Vérifier que $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k) = 1$ et déterminer la loi de Y .
- c) Vérifier que la variable aléatoire $Z = Y + 1$ suit la loi géométrique de paramètre $1 - \frac{1}{e}$.
En déduire l'espérance $\mathbb{E}(Y)$ et la variance $\mathbb{V}(Y)$ de la variable aléatoire Y .
- d) On considère la matrice aléatoire M à 2 lignes et 2 colonnes définie par : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & Y \end{pmatrix}$.
Calculer la probabilité que M soit inversible.

Exercice 3

- On note $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ respectivement, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X , et $\text{Cov}(X, Y)$, la covariance de deux variables aléatoires X et Y .
- On donnera les résultats sous forme fractionnaire.

On dispose de deux urnes \mathcal{U}_1 et \mathcal{U}_2 . L'urne \mathcal{U}_1 contient 3 boules rouges et 2 boules vertes, tandis que l'urne \mathcal{U}_2 contient 1 boule rouge et 4 boules vertes.

On choisit une des deux urnes au hasard (c'est-à-dire que chacune des deux urnes a la même probabilité d'être choisie), puis on tire dans l'urne choisie une boule que l'on remet ensuite dans la même urne.

- si la boule tirée est rouge, on effectue un second tirage d'une boule dans l'urne \mathcal{U}_1 ;
- si la boule tirée est verte, on effectue un second tirage d'une boule dans l'urne \mathcal{U}_2 .

Soit X_1 et X_2 les variables aléatoires définies par :

$$X_1 = \begin{cases} 1 & \text{si la première boule tirée est rouge} \\ 0 & \text{si la première boule tirée est verte} \end{cases}$$

et :

$$X_2 = \begin{cases} 1 & \text{si la deuxième boule tirée est rouge} \\ 0 & \text{si la deuxième boule tirée est verte} \end{cases}$$

On pose : $Z = X_1 + X_2$.

- a) Montrer que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{2}{5}$. Quelle est la loi de la variable aléatoire X_1 ?
b) Donner les valeurs de $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{V}(X_1)$.
- a) Montrer que $\mathbb{P}([X_2 = 0] \cap [Z = 0]) = \frac{12}{25}$.
b) Donner sous forme de tableau, la loi du couple (X_2, Z) .
- a) Déterminer la loi de X_2 ainsi que $\mathbb{E}(X_2)$ et $\mathbb{V}(X_2)$.
b) Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
c) Déterminer la loi de Z .

- d) Calculer $\mathbb{E}(Z)$. Montrer que $\mathbb{V}(Z) = \frac{414}{625}$.
4. On considère l'événement : « la première boule tirée est verte ». Calculer la probabilité que cette boule verte provienne d'un tirage dans l'urne \mathcal{U}_1 .
5. On se propose dans cette question de calculer $\mathbb{V}(Z)$ par une autre méthode.
- a) Calculer $\mathbb{E}(X_2Z)$.
- b) Montrer que $\text{Cov}(X_2, Z) = \frac{204}{625}$.
- c) En déduire la valeur de $\text{Cov}(X_1, X_2)$.
- d) Utiliser le résultat précédent pour calculer $\mathbb{V}(Z)$.

Exercice 4

Soit a un réel strictement supérieur à 1 et soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x^{a+1}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Dans cette question uniquement, on prend $a = 2$.
- a) Étudier les variations de la fonction f sur \mathbb{R} . On calculera notamment, les nombres dérivés de f à gauche et à droite de 1.
- b) Montrer que la fonction f est convexe sur $[1, +\infty[$.
- c) Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé.
2. Soit B un réel strictement supérieur à 1. On pose : $I(B) = \int_1^B \frac{a}{x^{a+1}} dx$.
- a) Calculer $I(B)$ et déterminer $\lim_{B \rightarrow +\infty} I(B)$.
- b) En déduire que f peut être considérée comme une densité de probabilité.
Dans toute la suite de l'exercice, on note X une variable aléatoire à densité admettant f pour densité ; on dit que X suit la loi \mathcal{L} de paramètre a .
3. a) Calculer pour tout réel $B > 1$, l'intégrale $J(B) = \int_1^B \frac{a}{x^a} dx$.
- b) En déduire que la variable aléatoire X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ dont on donnera la valeur.
- c) On suppose dans cette question uniquement que $a > 2$.
Montrer que X admet une variance $\mathbb{V}(X)$ et que $\mathbb{V}(X) = \frac{a}{(a-2)(a-1)^2}$.
4. On note F la fonction de répartition de X .
- a) Calculer pour tout x réel, $F(x)$.
- b) Résoudre l'équation : $F(x) = \frac{1}{2}$.
5. Pour n entier supérieur ou égal à 1, soit X_1, \dots, X_n, n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi \mathcal{L} de paramètre a . On pose pour tout $n \geq 1$: $T_n = \min(X_1, \dots, X_n)$. On a donc pour tout x réel :

$$[T_n > x] = [X_1 > x] \cap [X_2 > x] \cap \dots \cap [X_n > x]$$

On note G_n la fonction de répartition de la variable aléatoire T_n .

- a) Calculer pour tout x réel, $\mathbb{P}(T_n > x)$. En déduire pour tout x réel, $G_n(x)$.
- b) Vérifier que T_n suit une loi \mathcal{L} dont on précisera le paramètre.
En déduire l'espérance $\mathbb{E}(T_n)$ de T_n sans calculs.
6. On pose pour tout entier $n \geq 1$: $Z_n = \ln(T_n)$.
Déterminer la loi de Z_n et en déduire l'espérance $\mathbb{E}(Z_n)$ de Z_n sans calculs.